## Секция «Математика и механика»

# О решении интегро-дифференциального уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

***Лобсанова Татьяна Баировна***
*Студент*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*
*E-mail: lobsanova_tb@mail.ru*

При рассмотрении многих явлений физики, биологии и экономики случайность описывается комбинацией гауссовского и обобщенного пуассоновского процессов. В этом случае плотность распределения $P(t,f)$ случайной величины описывается интегро- дифференциальным уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова [1]

$$\frac{\partial P(t,f)}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 P(t,f)}{\partial f^2} - \mu \frac{\partial P(t,f)}{\partial f} + a\left(\int\limits_0^f P(f-z)ke^{-kz}dz - P(f)\right), \tag{1}$$

с начальными данными

$$P(0,f) = P_0(f), \tag{2}$$

где $\mu, \epsilon > 0, a > 0, k > 0$ – константы.

Например, основным достижением известной работы [2], посвященной теории эволюции генов, является нахождение стационарного решения уравнения (1) при $\epsilon = 0$.

Мы находим решение задачи Коши (1), (2) при помощи замены переменных

$$y(t,f) = \int\limits_0^f P(f-z)\, e^{-kz}\, dz,$$

перехода к уравнению 3-его порядка и последующим применением преобразования Фурье по переменной $f$.

Далее мы показываем, что умея находить плотность распределения $P(t,f)$ случайной величины $F$, отвечающей доходности портфеля ценных бумаг на рынке, допускающем скачки цен, можно построить оптимальную рискочувствительную стратегию управления портфелем. А именно, для случайной величины $F$ мы рассматриваем функционал

$$J = E(F) - \gamma D(F),$$

где $E(F)$ и $D(F)$ – математическое ожидание и дисперсия $F$, $\gamma$ – положительная константа, отвечающая параметру риска. Наши вычисления существенно упрощаются при помощи применения формулы, позволяющей при вычислении матожидания и дисперсии не делать обратное преобразование Фурье [3]. Например, при $P_0(f) = \delta(f - f_0)$, $f_0$ – положительная константа, получим очень простые выражения $E(F) = f_0 + (\mu + \frac{a}{k})t$, $D(F) = 2(\epsilon + \frac{a}{k^2})t$.

### Литература

1. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.

2. N. Friedman, L.Cai, X.S. Xie, Linking stochastic dynamics to population distribution: an analytical framework of gene expression // Phys. Rev. Lett, 97, 168302 (2006)

3. M.A. Martynov, O.S. Rozanova, On dependence of the implied volatility on returns for stochastic volatility models // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, in press, 2013.