Секция «Математика и механика»

Новые свойства показателей Перрона линейных дифференциальных систем

Гаргянц Александр Георгиевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: gaaaric@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с ее непрерывной ограниченной функцией $A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ множество решений системы A, а через $\mathcal{S}_*(A)$ – множество ее ненулевых решений, и положим $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_* = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1, 2]. Под *показателем Перрона* $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ будем понимать функцию

$$\pi(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|, \quad x \in \mathcal{S}_*, \qquad \pi(0) = -\infty.$$

Показателем Перрона системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем сужение π_A этой функции на пространство $\mathcal{S}(A)$, а его *главным значением* на $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – величину $\sup\{\pi_A(x) \mid x(0) \in \Pi\}$. Кроме того, будем называть *нетривиальной плоскостью* любое аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, отличное от одномерной прямой, проходящей через точку $0 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2 [3, 4]. Значение α показателя Перрона π_A системы $A \in \mathcal{M}^n$, принимаемое на решениях, начальные значения которых образуют подмножество $\mathcal{N} = \left(\pi_A^{-1}(\alpha)\right)(0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (со стандартной мерой Лебега и стандартной топологией нормы), называется:

1) *метрически типичным* или *метрически существенным*, если подмножество $\mathcal{N}$ имеет полную меру или, соответственно, хотя бы содержит подмножество положительной меры;

2) *топологически типичным* или *топологически существенным*, если дополнение к подмножеству $\mathcal{N}$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ или, соответственно, хотя бы в некотором его непустом открытом подмножестве есть множество первой категории по Бэру, т.е. представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Понятия типичности и существенности значения α показателя π_A можно распространить с пространства $\mathbb{R}^n$ на любое его *аффинное подпространство* Π (со стандартными мерой и топологией), заменив в определении 2 множества $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{N}$ их пересечениями с Π.

Известно [2], что для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ на любом аффинном пространстве в $\mathbb{R}^n$ главное значение показателя Перрона метрически типично и, тем более, метрически существенно. Вопрос о справедливости аналогичного утверждения для типичности и существенности в топологическом смысле был объявлен открытым в докладе [4].

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^n$ (с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами) и такое гиперпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, что на любой нетривиальной плоскости $\Pi \not\subset L$ нет ни одного топологически типичного и* *даже топологически существенного значения показателя Перрона. На любой плоскости* $\Pi \subset L$ *при этом главное (в* $\mathbb{R}^n$*) значение показателя Перрона не является даже топологически существенным.*

Таким образом, показатель Перрона в топологическом плане устроен сложнее, чем в метрическом: его главное значение для линейной системы может оказаться топологически нетипичным и даже несущественным не только на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, но и на практически всех его аффинных подпространствах.

Теорема 2. *Для любого ограниченного не более чем счетного подмножества чисел* $E \subset \mathbb{R}$ *существуют две системы* $A, B \in \mathcal{M}^n$*, показатель Перрона каждой из которых принимает в качестве топологически существенных в точности все значения из* E *и только их, причем главное значение (в* $\mathbb{R}^n$*) показателя Перрона системы* A *совпадает с* $\sup E$*, а системы* B *– строго больше* $\sup E$.

Рассмотрим подмножество $\mathcal{T}^n \subset \mathcal{M}^n$ систем, у которых главное значение показателя Перрона топологически типично на любом аффинном подпространстве. С помощью результата [1] доказывается, что множество $\mathcal{T}^n$ заведомо содержит все интегрально разделенные системы, образующие открытое всюду плотное [5] подмножество в пространстве $\mathcal{M}^n$, наделенном топологией равномерной на полупрямой сходимости.

Литература

1. Изобов Н. А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. №4. С. 469–477.

2. Изобов Н. А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №12. С. 2168–2170.

3. Сергеев И. Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. №11. С. 1661–1662.

4. Сергеев И. Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 48. №11. С. 1567–1568.

5. Миллионщиков В. М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. №7. С. 1167–1170.

Слова благодарности

Благодарю Сергеева Игоря Николаевича и Быкова Владимира Владиславовича за неоценимую помощь в научной работе и при создании этого сообщения, а также Стеклову Лидию за моральную поддержку на всех этапах подготовки к конференции.