Секция «Математика и механика»

О поведении решений различных вязкостных регуляризаций законов сохранения

Свищёва Инна Алексеевна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: inch4@mail.ru

Задача о регуляризации разрывного решения квазилинейных законов сохранения при помощи введения параболических членов является классической. Самым известным результатом в этой области является добавление постоянной вязкости к уравнению Хопфа и последующее использование замены Коула-Хопфа для сведения к уравнению теплопроводности (например, [1]). Хорошо известно, что в пределе по малой вязкости для такой регуляризации получается допустимое обобщенное решение уравнения Хопфа. Однако уже в курсе лекций И.М.Гельфанда [2] ставится вопрос о том, что можно рассматривать классы нелинейных вязкостей и тем самым регулировать ширину ударного перехода.

Мы рассматриваем класс уравнений вида:

$$u_t + u^\sigma u_x = (k(u)u_x)_x, \quad \sigma > 0 \tag{1}$$

$k(u)$ – гладкая неотрицательная монотонная функция, $u = u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ и ставим следующие задачи: 1) можно ли использовать нелинейную вязкость указанного вида для регуляризации обобщенного решения задачи Римана для закона сохранения $u_t + (\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}))_x = 0$

2) в частном случае задачи Римана с нулевым правым состоянием изучить поведение носителя решения уравнения (1) и гладкость решения на границе носителя. На первый вопрос ответ положительный. Ответ на второй вопрос зависит от поведения $k(u)$ в нуле. В частности, если $k(u) = u^\alpha$, то при любых $\alpha > 0$ носитель является ограниченным справа. Кроме того, от параметра α зависит гладкость решения в окрестности максимальной точки носителя. Эта зависимость такая же, что и для решения нелинейного параболического уравнения, отличающегося от (1) отсутствием адвективного члена [3].

Литература

1. 1. Лакс П.Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных 2010

2. 2. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений//УМН, 14:2(86) (1959), 87–158

3. 3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.1987