Секция «Математика и механика»

Задача о движении пылевого облака для упрощенных моделей разреженных сред

Рыбалко Лилия Сергеевна
Студент
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Строитетьный факультет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: rybalkoliliya@mail.ru

При изучении образования кластеров в запыленных газах и межзвездной пыли используются упрощенные модели различной природы. Первая модель принадлежит Я.Б.Зельдовичу и представляет собой комбинацию уравнения сохранения массы и уравнений переноса [5]:

$$\rho_t + \nabla(\rho u) = 0, \qquad \partial_t u + (u, \nabla)u = 0. \tag{1}$$

Здесь скалярная функция $\rho(t,x)$ и векторная функция $u(t,x)$ обозначают плотность и скорость, соответственно, $t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

Вторая модель представляет собой систему законов сохранения массы и момента, записанную в дивергентной форме [4]:

$$\rho_t + \nabla(\rho u) = 0, \qquad (\rho u)_t + \nabla(\rho u \otimes u) = 0. \tag{2}$$

Она получается предельным переходом из обычных уравнений газовой динамики при стремящемся к нулю давлении [2] и называется системой газовой динамики без давления. Системы (1) и (2) эквивалентны на классических решениях, однако свойства их разрывных решений различны.

Известно, что эти системы относятся к нестрого гиперболическим и некоторые компоненты их решения могут содержать δ-функции, то есть быть сильно сингулярными. Мы показываем, что уже в одномерном случае попытка построения обобщенного решения задачи Коши для систем (1) и (2) приводит к различным результатам. Мы рассматриваем пылевое облако, первоначально равномерно рассредоточенное на отрезке, чему отвечают начальные данные:

$$(u^0(x), \rho^0(x)) = \begin{cases} (0,0), & \text{если } x < 0; \\ (u_0, \rho_0), & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ (0,0), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Согласно [1] решение ищем в виде:

$$u(x,t) = u_+(x,t) + [u(x,t)]H(-x + \phi(t)),$$

$$\rho(x,t) = \rho_+(x,t) + [\rho(x,t)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)),$$

где $[u(x,t)] = u_- - u_+, [\rho(x,t)] = \rho_- - \rho_+$, функции $u_\pm(x,t), \rho_\pm(x,t), e(t), \phi(t)$ определяются в процессе построения решения, $x = \phi(t)$ – уравнение линии разрыва. В системе (1) со временем происходит концентрация массы (появление δ-функции) на фронте ударной волны, в случае же системы (2) концентрации массы не происходит. Отметим, что при других начальных условиях для системы (2), например, соответствующих столкновению двух пылевых облаков, в компоненте плотности также образуются δ-функции [3].

Литература

1. Шелкович, В.М. Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ - и δ'-ударных волн и процессы переноса и концентрации // Успехи Математических Наук. 2008. No.3(381). С. 73-146.

2. Chen, G.-Q. and Liu, H. Formation of δ-shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for isentropic fluids // SIAM J. Math. Anal. 2003. Vol.34. p. 925-938.

3. LeVeque, R.J. The dynamics of pressureless dust clouds and delta waves // Journal of Hyperbolic Differential Equations. 2004. Vol.1. No.2. p. 315-327.

4. Seo, Y.M. Kim, J. Hong, S.S. A dynamics code for a dusty interstellar cloud embedded in inter-cloud medium // The Astrophysical Journal. 2011. Vol. 728. p.140.

5. Zeldovich, Ya. B. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations // Astronomy and Astrophysics. 1970. Vol.5. p.84-89.