Секция «Математика и механика»

Слабая разрешимость и сходимость метода Галёркина для дробного уравнения диффузии

Гуляницкий Андрей Леонидович

Студент

Киевский Национальный Университет имени Тараса Шевченко, Факультет кибернетики, Киев, Украина

E-mail: andriyhul@gmail.com

В работе рассматривается эволюционное уравнение

$$ {}_0D_t^\alpha u + \mathcal{A}u = f, \tag{1}$$

где

$$({}_0D_t^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, dt \ -$$

дробная производная в смысле Капуто, $0 < \alpha < 1$, u и f – отображения вида $[0,T] \to H$, где H – пространство функций переменной $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (или функционалов, действующих на этих функциях). Через $\mathcal{A}$ обозначен эллиптический оператор второго порядка.

Уравнения вида (1) описывают медленную диффузию (субдиффузию). Такие процессы характерны для сред с памятью, в частности, некоторых материалов фрактальной структуры [3]. Близкие к (1) уравнения с производной Римана-Лиувалля изучались в [2].

Предположим, что $\mathcal{A}$ положительно определён и действует между соболевскими пространствами $H_0^1(\Omega)$ и $H_0^{-1}(\Omega)$. Через $W^\alpha([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ обозначим множество функций, производные Капуто порядка α которых содержатся в $L_2([0,T], H_0^{-1}(\Omega)))$.

Теорема. Для произвольных $f \in L_p([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ и $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, где $p > 2/\alpha$, существует и единственно решение $u \in L_p([0,T], H_0^1(\Omega)) \bigcap W^\alpha([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$. Более того, $u \in C([0,T], L_2(\Omega))$.

Отметим, что непрерывность решения позволяет рассматривать, в частности, задачи оптимального управления с финальным наблюдением.

Теорема доказана с использованием метода Галёркина (аналогично случаю параболического уравнения, см. напр. [1]). Это позволило также обосновать сходимость приближений вида $u_m = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) w_i(x)$, где w_i – базис в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Теорема. $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$ и *-слабо в $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$.

Литература

1. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.

2. Bajlekova, E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD Thesis. Eindhoven, 2001.

3. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent develpoments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 37, 2004. p. 161-208.