Секция «Математика и механика»

О целочисленных билинейных отображениях

Лысиков Владимир Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: lysikov-vv@yandex.ru

Одной из основных проблем алгебраической теории сложности является нахождение асимптотической сложности матричного умножения. Для исследования этой проблемы обычно применяется модель билинейных алгоритмов.

Определение 1. Пусть S — коммутативное кольцо. Отображение $\varphi\colon S^m \times S^n \to S^p$ называется билинейным, если

$$\varphi(ax_1 + bx_2, y) = a\varphi(x_1, y) + b\varphi(x_2, y), \tag{1}$$
$$\varphi(x, ay_1 + by_2) = a\varphi(x, y_1) + b\varphi(x, y_2). \tag{2}$$

Определение 2. Билинейным алгоритмом для отображения $\varphi\colon S^m \times S^n \to S^p$ называется набор троек $(f_k, g_k, w_k)|_{k=1}^r$, где $f_k\colon S^n \to S$, $g_k\colon S^m \to S$ — S-линейные функционалы, $w_k \in S^p$ такой, что

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{r} f_k(x) g_k(y) w_k. \tag{3}$$

Число троек r называется длиной билинейного алгоритма. Минимально возможная длина алгоритма для φ называется билинейной сложностью или рангом этого отображения и обозначается $R(\varphi)$.

Билинейное отображение может быть однозначно задано набором коэффициентов (c_{ijk}), определяемых равенством $\varphi(e_i, e_j) = \sum c_{ijk} e_k$, где e_i — стандартный базис в S^n. Любое билинейное отображение φ над $\mathbb{Z}$ может быть рассмотрено как билинейное отображение φ^S над любым кольцом S, задаваемое тем же набором коэффициентов. Будем обозначать ранг полученного отображения символом $R_S(\varphi)$

Обычно билинейные отображения рассматриваются в случае, когда R — поле, однако многие основные отображения (напр. умножение матриц и многочленов) могут быть рассмотрены над любым кольцом. Билинейные алгоритмы над коммутативными кольцами рассматривались в [1] и [3].

Для исследования сложности матричного умножения вводится понятие асимптотического ранга.

Определение 3. Тензорным произведением билинейных отображений $\varphi\colon S^m \times S^n \to S^p$ и $\psi\colon S^{m'} \times S^{n'} \to S^{p'}$ называется отображение $\varphi \otimes \psi\colon S^{mm'} \times S^{nn'} \to S^{pp'}$, задаваемое коэффициентами $c_{i+i'm, j+j'n, k+k'p} = c_{ijk} c_{i'j'k'}$.

Определение 4. Асимптотическим рангом отображения φ называется предел

$$\tilde{R}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R(\varphi^{\otimes n})} \tag{4}$$

Метод Шёнхаге из [2] может быть применен к произвольному билинейному отображению и позволяет показать, что для поля F асимптотический ранг $\tilde{R}_F(\varphi)$ зависит только от характеристики этого поля.

Лемма 1. Справедливо соотношение

$$R_{\prod_i S_i}(\varphi) = \max_i R_{S_i}(\varphi). \tag{5}$$

Лемма 2. Если S, T — кольца без делителей нуля, S инъективно вложено в T, а F — поле частных S, то $\tilde{R}_F(\varphi) < \tilde{R}_T(\varphi)$. Если T цело над S, то $\tilde{R}_T(\varphi) = \tilde{R}_S(\varphi)$.

С помощью этих лемм можно доказать следующий результат:

Теорема 1. Справедливо соотношение

$$\tilde{R}_{\mathbb{Q}}(\varphi) = \lim_{p\to\infty} \tilde{R}_{\mathbb{F}_p}(\varphi). \tag{6}$$

В частности, аналогичное соотношение справедливо для экспонент матричного умножения.

Литература

1. Howell T. D. Global properties of tensor rank //Linear Algebra and its Applications. – 1978. – Т. 22. – С. 9-23.

2. Schönhage A. Partial and total matrix multiplication //SIAM Journal on Computing. – 1981. – Т. 10. – №. 3. – С. 434-455.

3. Strassen V. Relative bilinear complexity and matrix multiplication //Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1987. – Т. 375. – С. 406-443.

Слова благодарности

Автор благодарен В.Б. Алексееву за научное руководство. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12–01–91331–Н а.