## Секция «Математика и механика»

# Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения

***Никонов Василий Иванович***

*Студент*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: nikon_v@list.ru*

Рассматривается задача о движении треугольника $A_1A_2A_3$, в вершинах которого сосредоточены массы $m_1$, $m_2$, $m_3$ и точки $P$ массы $m$ под действием сил взаимного ньютоновского притяжения. Находятся стационарные конфигурации и исследуются достаточные условия их устойчивости. Обсуждается вопрос о применимости барицентрических координат при решении такого рода задач. Предполагается, что $\Delta A_1A_2A_3$ и точка $P$ остаются в одной неподвижной плоскости во все время движения. Пусть $M = m_1 + m_2 + m_3$, $|A_1A_2| = \ell_3 \quad (1, 2, 3)$. Без нарушения общности можно считать, что точка $S$ — начало абсолютной системы координат $SX_1X_2X_3$ оси $SX_1$ и $SX_2$ которой располагаются в плоскости движения. Введем подвижную систему координат. Пусть начало ее находится в точке $S$, ось $Sx_1$ проходит через точку $P$, а оставшиеся выбраны так, чтобы репер был правым. Изучать движения системы будем в подвижном репере. Стационарные конфигурации находятся как критические точки потенциала

$$U = \frac{1}{2}\frac{P_\psi^2}{J} - mG\sum_i \frac{m_i}{\rho_i}, \quad \rho_i = (\overrightarrow{PA_i}, \overrightarrow{PA_i})^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

Здесь и далее, $P_\psi$ — постоянная интеграла площадей, $G$ — константа тяготения. $J$ — момент инерции системы в целом относительно оси, проходящей через $S$ и перпендикулярной плоскости движения, определяемый как

$$J = m(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SP}) + \sum_i m_i(\overrightarrow{SA_i}, \overrightarrow{SA_i}) = \mu\rho^2 + \frac{1}{M}\sum_{(1,2,3)} m_1m_2\ell_3^2, \quad \mu = \frac{mM}{M+m}, \quad \rho = (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PC})^{\frac{1}{2}}$$

Для описания свойств установившихся движений можно воспользоваться системой барицентрических координат [1], связанной с $\Delta A_1A_2A_3$. По определению, барицентрические координаты точки $P$ на плоскости — это тройка чисел $(x_1, x_2, x_3)$, таких, что $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, задающих "массы" $x_1$, $x_2$, $x_3$, которые надо поместить в точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно, чтобы точка $P$ была их центром масс. В силу зависимости между собой переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$ для определения критических точек приведенного потенциала (1) применим функцию $W_\lambda = U + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$. Критические точки описываются уравнениями

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial J}{\partial x_1} + Gm\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i}{\rho_i^2}\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} + \lambda = 0 \qquad (1, 2, 3)$$

где $\omega = P_\psi/J$. Эти уравнения надо рассматривать вместе с уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, выражающим зависимость переменных. Исключение $\lambda$ приводит к системе уравнений

$$\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i\left(\frac{\partial J}{\partial x_i} - \frac{\partial J}{\partial x_1}\right) + Gm\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i}{\rho_i^2}\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} - \rho_i\right) = 0 \quad (1, 2, 3), \tag{2}$$

позволяющее найти стационарные конфигурации в зависимости от $\omega^2$.

**Первое частное решение**

**Утверждение** Если центр масс С треугольника $A_1A_2A_3$ совпадает с центром $O$ его описанной окружности, то существует стационарное движение, на котором точки $C$ и $P$ совпадают, а сам треугольник вращается вокруг своего центра масс с постоянной угловой скоростью.

Такое стационарное движение существует, если выполнено

$$\mu_1 = x_1^* = \frac{\ell_1^2(-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2)}{16\mathcal{S}^2} \qquad (1, 2, 3),$$

где $\mathcal{S}$ — ориентированная площадь $\Delta A_1A_2A_3$, $\mu_1 = m_1/M$. Рассмотрим случай равностороннего треугольника со стороной $\ell$. Массы, лежащие в вершинах, будут равны $m_3 \neq m$. Тогда степень неустойчивости такого стационарном движении равна двойке.

**Второе частное решение**

Рассмотрим частный случай, когда задача обладает симметрией. Пусть $m_1 = m_2$, $\ell_1 = \ell_2$. В этом случае $\Delta A_1A_2A_3$ равнобедренный, и его распределение масс симметрично относительно оси геометрической симметрии. Тогда существует семейство частных решений, на которых

$$x_1 = x_2 = x, \quad x_3 = 1 - 2x$$

На этих решениях система уравнений (2) сведется к двум уравнениям

$$(1-2x)\left(\omega^2\frac{x-\mu}{m+M} - G\left(\left(\frac{\mu_3}{\rho_3^3} + 2\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\right)x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}\right)\right) = 0$$

$$x\left(\omega^2\frac{x-\mu}{m+M} - G\left(\left(\frac{\mu_3}{\rho_3^3} + 2\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\right)x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}\right)\right) = 0$$

Из этой системы легко находим, что при $x^* = \frac{1}{3}$ существует стационарное движение при любом $P_\psi^2$. Кроме того, можно найти зависимость решения $x$ от постоянной интеграла площадей.

$$\frac{P_\psi^2}{G(m+M)} = \frac{J^2}{x-\mu_1}\left[\left(\frac{2\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_3}{\rho_3^3}\right)x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}\right]$$

Отметим, что решению $x^* = \frac{1}{3}$ соответствует $\chi = 2$. Этот случай рассмотрен в параграфе "Первое частное решение". Функция $P_\psi^2 = P_\psi^2(x)$ имеет ноль в точке $x_0 \approx 0.428239$, степень неустойчивости $\chi = 1$ при $x_0$, и три точки экстремума: $x_1 \approx -1.012376$, $x_2 \approx 0.666667$ и $x_3 \approx 1.452586$, со степенями неустойчивости $\chi = 1$, $\chi = 1$ и $\chi = 2$, соответственно. Обратим внимание, что точка $x_0$ означает стационарность конфигурации неподвижной системы треугольник – точка, что, вообще говоря, неочевидно. Диаграмма Смейла представляет собой кривую, которая разбивает пространство координат $(P_\psi^2, K)$, где $K$ – константа интеграла энергии, на двенадцать областей ($A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $J$, $K$, $L$), каждой из которых соответствуют области возможных движений (ОВД) с отличительными топологиями.

## Литература

1. Балк М. Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987, Вып. 61. 160 с.

**Слова благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. Бурову Александру Анатольевичу за ценные советы и плодотворное сотрудничество.