

Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Интерпретации арифметики Пресбургера в себя

Запрягаев Александр Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: rudetection@gmail.com

Арифметикой Пресбургера называется полная теория натурального ряда с операцией сложения (в отличие от арифметики Пеано, наряду со сложением также рассматривающей умножение), введённая М. Пресбургером в 1929 г. [3] Эта теория разрешима (и даже допускает элиминацию кванторов), но не является конечно аксиоматизируемой.

А. Виссер предложил рассмотреть вопрос описания всех одномерных интерпретаций [1] без параметров арифметики Пресбургера в саму себя и выдвинул гипотезу о том, что все такие интерпретации доказуемо изоморфны тождественной. Й. Зутхаут [4] установил, что истинность этой гипотезы влечёт также невозможность интерпретировать арифметику Пресбургера ни в одной из своих конечно аксиоматизируемых подтеорий. В его работе изначальный вопрос был оставлен открытым, однако задача была сведена к более простому вопросу исследования внутренней модели арифметики Пресбургера в себе при рассмотрении только стандартной модели.

В настоящей работе мы доказываем гипотезу Виссера-Зутхаута. Функцию, осуществляющую изоморфизм интерпретации арифметики Пресбургера в себя тождественной, удастся определить на основе анализа интерпретированного отношения порядка. Идея этого подхода была предложена к.ф.-м.н. Ф. Н. Пахомовым. Также мы устанавливаем неожиданную связь, возникающую между интерпретациями теории отношения следования на натуральных числах в арифметике Пресбургера и вопросами, родственными известной задаче Улама-Коллатца о последовательности « $3n+1$ ».

Источники и литература

- 1) Hodges, F. Model Theory // Cambridge University Press, 1999.
- 2) Muchnik An. A. The Definable Criterion for Definability in Presburger Arithmetic and its Applications // Theoretical Computer Science, Volume 290, Issue 3, 3 January 2003, P. 1433-1444.
- 3) Presburger, M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa: 1929, P. 92–101.
- 4) Zoethout, Jetze. Interpretations in Presburger Arithmetic / Bachelor Thesis under the supervision of Albert Visser // Department of Philosophy, Utrecht University, 2015.