Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Отображения, сохраняющие скрамблинг-индекс

Максаев Артем Максимович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: artmak95@mail.ru

В 2009 году Акельбек и Киркланд (см. [1]) ввели понятие скрамблинг-индекса неотрицательной примитивной матрицы A, обозначаемого через $k(A)$. Согласно их определению, $k(A)$ равно наименьшему натуральному k, такому что для любых двух строк матрицы A^k имеется столбец, в пересечении с которым в этих строках находятся положительные числа. Это определение является важным для некоторых приложений. В частности, скрамблинг-индекс тесно связан с известным коэффициентом Добрушина (или дельта-коэффициентом), который применяется, например, для исследования ряда свойств цепей Маркова (см. [2], [3]). Однако в литературе недостаточно полно охарактеризованы отображения, сохраняющие скрамблинг-индекс.

Целью настоящей работы является полное описание сюръективных линейных операторов на пространстве матриц над неотрицательным полукольцом S с 1 без делителей нуля, сохраняющих скрамблинг-индекс, установленное в [5].

В процессе проведенных исследований был выявлен ряд свойств таких операторов. Ниже представлены две теоремы, полностью описывающие некоторые классы сохраняющих скрамблинг-индекс отображений.

Теорема. Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(S) \to M_n(S)$ — линейное сюръективное отображение, сохраняющее скрамблинг-индекс. Тогда $T(A) = P^T(A \circ B)\,P$ для любой матрицы $A \in M_n(S)$, где P — некоторая перестановочная матрица, а $B \in M_n(S)$ — матрица, каждый элемент которой имеет левый обратный (т.е. $\forall i, j\ \exists c_{ij}\colon c_{ij}b_{ij} = 1$).

Теорема. Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(S) \to M_n(S)$ — линейное сюръективное отображение, сохраняющее скрамблинг-индекс 1. Тогда $T(A) = P(A \circ B)\,Q$ для любой матрицы $A \in M_n(S)$, где P, Q — некоторые перестановочные матрицы, а $B \in M_n(S)$ — матрица, каждый элемент которой имеет левый обратный.

Здесь $A \circ B$ обозначает поэлементное произведение матриц.

Источники и литература

1) M. Akelbek, S. Kirkland. Coefficients of ergodicity and scrambling index, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1111-1130.
2) E. Seneta. Nonnegative Matrices and Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1981.
3) A. Paz. Introduction to Probabilistic Automata, Academic Press, New York, 1971.
4) L. B. Beasley, A. E. Guterman. The characterization of operators preserving primitivity for matrix k-tuples, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1762-1777.
5) A. E. Guterman, A. Maksaev. Scrambling index preservers, preprint.

Слова благодарности

Я выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, Александру Эмилевичу Гутерману, за совместную работу над данной темой.