Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Задача Шапиро для оператора свертки

Научный руководитель – Напалков Валентин Васильевич

Муллабаева Айгуль Ураловна
Кандидат наук
Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия
E-mail: mullabaeva.87@mail.ru

<p>Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.nbsp;</p> <p>В 1989 г. Шапиро [2] поставил следующую задачу: можно ли любую функцию из пространства $H(\mathbb{C}^n)$ представить в виде суммы решения заданного однородного nbsp;дифференциального уравнения nbsp;и идеала, порожденного характеристической функцией данного уравнения с сопряженными коэффициентами.</p> <p>В этой же работе Шапиро получил решение данной задачи для дифференциального оператора, порожденного *однородным* полиномом:</p> <p>nbsp;</p> <p>

Теорема 1. *</p> <p>nbsp;Пусть P — произвольный однородный полином в $\mathbb{C}^n$. Тогда любую функцию $f \in\ H(\mathbb{C}^n)$ можно представить единственным образом в <u>виде</u> $f = g + h$, где $g, h \in nbsp; H(\mathbb{C}^n)$, причем h кратно P, а $P^*(D)g = 0$, где $P^*(z) = \overline{P(\overline{z})}, D = (D_1, ..., D_n), D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$.</p> <p>*

</p> <p>В дальнейшем исследуется пространство $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций одной комплексной переменной с топологией равномерной сходимости на компактах.</p> <p>Введем пространство $H^*(\mathbb{C})$ — пространство сопряженное к $H(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального роста. Преобразование Лапласа $\widehat{F}(\lambda) = (F, e^{\lambda z}) = \varphi(\lambda),\ F \in H^*(\mathbb{C})$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$.nbsp;</p> <p>nbsp;</p> <p>Последовательность функций $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}, q_n \in P_{\mathbb{C}}$ сходится в топологии пространства $P_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда (см. [1]), когда последовательность q_n сходится равномерно на каждом компакте плоскости $\mathbb{C}$ и существуют константы $c, \sigma gt; 0$ такие, что равномерно относительно n выполняются оценки $|q_m(z)| \leq ce^{\sigma|z|}$.</p> <p>nbsp;</p> <p>Рассмотрим в пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор свертки с характеристической функцией φ :</p> <p>

$$M_{\varphi}[f](z) = (F_t, f(z+t)), \qquad f \in H(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{C}.$$

</p> <p>nbsp;</p> <p>Работа посвящена решению задачи Шапиро для оператора свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$, а именно, можно ли произвольную функцию $f \in H(\mathbb{C})$ представить в видеnbsp;</p> <p>

$$< /p >< p > f = w + \varphi^* \cdot l, \quad \text{где } w \in \ker M_{\varphi}, \quad l \in H(\mathbb{C}), \quad \varphi^*(z) = \overline{\varphi(\overline{z})}.\ nbsp; < /p >< p \qquad (1)$$

</p> <p>nbsp;</p> <p>Для решения поставленной задачи рассмотрим оператор свертки K_{φ^*} в пространстве $P_{\mathbb{C}}$:nbsp;</p> <p>

$$< /p >< p > K_{\varphi^*}[\psi](\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\lambda z}\varphi^*(z)g_\psi(z)dz, \quad \psi \in P_{\mathbb{C}}, < /p >< p >$$

nbsp;</p> <p>где φ^* — характеристическая функция этого оператора, функция g_ψ — ассоциированная по Борелю с функцией ψ, контур C охватывает все nbsp;особенности функции g_ψ.</p> <p>nbsp;</p> <p><p>Обозначим через $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ множество нулей функции φ.nbsp;</p> <p><p>nbsp;</p> <p>nbsp;

Определение 1. Будем говорить, что $N_\varphi \subset \mathbb{C}$ *секвенциально достаточное множество в пространстве nbsp;*$\ker K_{\varphi^*}$, если из сходимости к нулю любой последовательности функций из $\ker K_{\varphi^*}$, на компактах множества N_φ вытекает сходимость этой последовательности в топологии $P_{\mathbb{C}}$ к нулю во всех точках z, принадлежащих некоторому компакту $K, K \subset \mathbb{C}$.</p> <p>nbsp;

nbsp;</p> <p>

Теорема 2. *</p> <p>Пусть φ — характеристическая функция оператора M_φ, нули которой</p> <p>являются секвенциально достаточным множеством в $\ker K_{\varphi^*}$, тогда разрешима задача Шапиро для оператора свертки M_φ в пространстве $H(\mathbb{C})$.</p> <p>*

nbsp;</p> <p>nbsp;</p> <p>Попутно получено решение задачи Валле Пуссена для оператора свертки с узлами интерполяции в нулях характеристической функции с сопряженными коэффициентами оператора свертки.</p>

Источники и литература

1) Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях*// Сб. пер. Математика. 1957. Т. 1. С. 60–77
2) Shapiro H.S. *An algebraic theorem of E. Fisher, and the holomorfic Goursat problem*// Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 513–537