Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Представления с помощью формул Фейнмана для решений параболических уравнений второго порядка в областях поверхностей с особенностями.

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Дубравина Виктория Андреевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: dubravina_vika@mail.ru

Формулой Фейнмана называется представление решения задачи Коши для эволюционного дифференциального уравнения (или связанного с ним объекта) в виде предела последовательности кратных интегралов по декартовым степеням некоторого пространства E при числе сомножителей E, стремящемся к бесконечности. Найдено представление с помощью таких формул решений параболических дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций, определенных на разветвленных поверхностях нескольких различных типов. При этом разветвленной поверхностью мы будем называть дизъюнктное объединение K нескольких гладких n-мерных областей K_i с кусочно гладким краем.

Предполагается, что решение уравнения удовлетворяет условиям согласования на границах областей, объединение которых рассматривается в качестве разветвленной поверхности. Некоторые из них можно интерпретировать как соответствующие одному из законов Кирхгофа.

Для задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t),\ \psi(0) = f_0,\ \text{где } \psi : [0,\infty) \to D_A, f_0 \in D_A,$$

относительно функций, определенных на разветвленной поверхности K, предлагается операторно-значная функция $F(t) = I_2G_2(t)G_1(t)I_1$, при $t > 0$, где $I_1 : L_1(K) \to L_1(Z)$, $I_2 : L_1(Z) \to L_1(K)$, $G_2(t) : L_1(Z) \to L_1(Z)$, $G_1(t) : L_1(Z) \to L_1(Z)$. При этом

$$I_1(f) = g \Rightarrow g_i(q) = \begin{cases} f_i(q) \text{ при } q \in K^i \\ 0 \text{ при } q \notin K^i \end{cases},\quad i = 1, \dots m,\ q \in Z^i;$$

$$I_2(g) = f \Rightarrow f_i(q) = g_i(q),\quad i = 1, \dots m,\ q \in K^i.$$

$$(G_2(t)f)_i(q) = \frac{1}{2\pi t c_i(q)} \int\limits_{Z^i} e^{-\frac{(q-r)^2}{2tc_i(q)}} f_i(r) vol(dr),$$

где для каждого i многообразие $Z_i \supset K_i$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$, $Z = \bigsqcup_i Z_i$, а конкретный вид функций $G_1(t)$ зависит типа разветвленной поверхности и условий согласования.

При доказательстве следующей теоремы существенным образом используется теорема Чернова.

Теорема. Пусть $\psi : [0,\infty) \to L_1(K)$ — решение поставленной выше задачи Коши с начальным условием $f_0 \in L_1(K)$. Тогда для любого $t > 0$ справедлива следующая формула Фейнмана:

$$\psi(t) = \lim_{k\to\infty} F(t/k)^k f_0.$$

При этом, каково бы ни было $\alpha > 0$, сходимость последовательности $F(t/k)^k f_0$ равномерна по $t \in [0, \alpha]$.

Источники и литература

1) A.S. Plyashechnik. Feynman formulas for second-order parabolic equations with parabolic coeffcients. Russian Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 20. No 3.
2) Смолянов О.Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: Изд-во МГУ, 1979. — 86 с.
3) М.Х. Нуман Эльшейх. Операторы Шредингера на разветвленных многообразиях и их аппроксимации. Кандинатская диссертация. физ. мат. Москва, 2014. 113 с.