Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Операторы слабого типа и сходимость почти всюду

Научный руководитель – Лукашенко Тарас Павлович

Фуфаев Денис Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва,
Россия
E-mail: fufaevdv@rambler.ru

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^1(X, \mu)$ в $L^0(X, \mu)$. Назовем T выпуклым, если справедливого неравенство $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$ $x \in X$. Выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} ||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Пусть $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность линейных операторов, переводящих $L^1(X, \mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x) \mapsto \sup\limits_{n\in N} |T_n f(x)|$. Оператор T оказывается выпуклым.

Очень важным в теории меры является следующий факт [1, теорема 5.1.3]:

Теорема 1. *Пусть (X, μ) — пространство конечной меры, последовательность линейных операторов $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип (1,1), и пусть для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X, \mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\phi(x) = \phi(x)$ почти всюду на X. Тогда для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ почти всюду на X.*

Представляют интерес возможные обобщения этой теоремы, для возможности их применения в ситуациях, не подподающих под условия теоремы. Оказываются справедливыми следующие результаты:

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям:*

1. Соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип (1,1);

2. Для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X, \mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\phi(x) = A\phi(x)$ п.в. на X, A — непрерывный линейный оператор из $L^1(X, \mu)$ в себя.

Тогда для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = Af(x)$ п.в. на X.

Пусть теперь A и T_n — непрерывные линейные операторы из $L^1_{loc}(X, \mu)$ в $L^1_{loc}(X, \mu)$.

Теорема 3. *Пусть (X, μ) — разложимое пространство [2, 211E], то есть $X = \coprod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mu(X_\alpha) < \infty$, последовательность операторов $\{T_n\}_{n\to\infty}$ удовлетворяет условиям:*

1. Соответствующий максимальный оператор T удовлетворяет условию $\mu\{x \in X_\alpha : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C_\alpha}{\lambda} ||f||_{L(X_\alpha)}$ для любых $\lambda > 0, a \in \Lambda, f \in L^1_{loc}(X, \mu)$;

2. Для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1_{loc}(X, \mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\phi(x) = A\phi(x)$ почти всюду на X.

Тогда для любой функции $f \in L^1_{loc}(X, \mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = Af(x)$ п.в. на X.

Источники и литература

1) Голубов Б.И.,Ефимов А.В.,Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Изд. ЛКИ, 2008. 352.
2) Fremlin D.H. Measure theory, V.2. University of Essex, Colchester, 2001. 563.