Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича

Научный руководитель – Мукминов Фарит Хамзаевич

Воробьёв Никита Александрович
Выпускник (специалист)
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
E-mail: Niksparrow@yandex.ru

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 1$. В цилиндрической области $D^T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(u))_t = \sum_{i=1}^{n} (B_i'(u_{x_i}))_{x_i} + b(x,u) \tag{1}$$

с начальным и краевым условиями:

$$\beta(x, u(0,x)) = \beta(x, u_0(x)) \in L_1(\Omega);\ u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega. \tag{2}$$

Здесь B_i – N-функции, не удовлетворяющие Δ_2-условию; $\beta(x,u)$ – возрастающая и непрерывная по u функция, измеримая по x, $\beta(x,u) \in L_1(\Omega)$ при всех $x \in R$.

Предполагается, что область Ω обладает сегментным свойством.

Пусть $L_B(Q)$ обозначает пространство Орлича, соответствующее N-функции B с нормой Люксембурга. Замыкание пространства $Lip_0(Q)$ в $L_B(Q)$ будем обозначать через $E_B(Q)$. Пространство $L_B(Q)$ является сопряженным к пространству $E_{\overline{B}}(Q)$.

Определим анизотропное пространства Соболева-Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$, как множество тех элементов $\theta = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \prod_{i=1}^n L_{B_i}(\Omega)$, для которых существуют последовательности $\varphi_m \in C_0^1(D^T)$ такие, что $\nabla\varphi_m \to \theta$ $*$-слабо как последовательности функционалов над $\prod_{i=1}^n E_{\overline{B}_i}(D^T)$. Пусть

$$\overline{B}_1(b(x,r)) \leq C(m)F(x),\ |r| \leq m;\ \forall m > 0; F(x) \in L_1(\Omega). \tag{3}$$

Ренормализованным решением задачи (1),(2) называется измеримая функция $u : D^T \to R$ такая, что
1) $\nabla T_k(u) \in W^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$ при всех $k > 0$; $\nabla u :\ \chi(|u| < k)\nabla u = \nabla T_k(u)$;
2) $\widetilde{b}(u) = b(x,u) \in L_1(D^T)$; $\beta(x,u) \in L_1(D^T)$;

функция $\widetilde{a}(u) = a(x,u,\nabla u)$ удовлетворяет при всех $k, N > 0$ условиям:

$$[\chi(m \leq |u| \leq m+1)|\widetilde{a}(u) \cdot \nabla u|] \to 0 \text{ при } m \to \infty; \tag{4}$$

При всех $h \in Lip_0()$, $\xi \in C_0^1(D^T_{-1})$, $D^T_{-1} = (-1,T) \times \Omega$, выполнено равенство

$$[\xi_t \int_{u_0}^{u} h(r)d\beta(x,r) + \xi\widetilde{b}(u)h(u)] = [\widetilde{a}(u) \cdot \nabla(h(u)\xi)], \quad \beta(x,u_0) \in L_1(\Omega). \tag{5}$$

Теорема 1. *При наложенных требованиях (3)-(5) существует ренормализованное решение задачи (1), (2).*

Единственность ренормализованного решения доказана в работе:

Ф. Х. Мукминов, “Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича”, Матем. сб. (в печати).