Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Локальные аттракторы краевых задач обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского

Научный руководитель – Куликов Анатолий Николаевич

Секацкая Алина Вадимовна

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: alinastart@mail.ru

Введение. Рассматривается одна из версий обобщенного уравнения Курамото-Сивашинског

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} + c_1 {u_x}^2 + c_2 u_x u_{xx}, \tag{1}$$

где $u = u(t, x,), b, c_1, c_2 \in R, c_1 \neq 0, 2c_1^2 - c_2^2 \neq 0$. Уравнение (1) используется в качестве математической модели формирования нанорельефа [1]. Обычно уравнение (1) рассматривается вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{2}$$

Возможны и иные их варианты. Например, $u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0$ [2]. Допустим вариант краевых условий шарнирного опирания

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \tag{3}$$

Краевая задача (1), (2) имеет семейство состояний равновесия , которые устойчивы при $b < 1$ и неустойчивы при $b > 1$. Пусть $b = 1 + \gamma\varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, \gamma = \pm 1$.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (1), (2) имеет трехмерное центральное многообразие $M_3(\varepsilon)$ ($dim M_3(\varepsilon) = 3$), которое является локальным аттрактором. Динамику решений краевой задачи (1), (2) определяет система трех обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\rho` = \gamma\rho + b_1\rho^3 + O(\varepsilon), \phi' = b_2\rho^2 + O(\varepsilon), \psi' = b_0\rho^2 + O(\varepsilon), b_1 = (c_2^2 - 2c_1^2)/6, b_2 = -(c_1 c_2)/2, b_0 = 2c_1,$$

$$\rho = \rho(s), \phi = \phi(s), \psi = \psi(s), s = \varepsilon t.$$

В частности, при $\gamma b_1 < 0$ краевая задача (1), (2) имеет t периодическое решение

$$u(t, x) = (\varepsilon b_0 \rho_0^2 + o(\varepsilon))t + v(t, x, \varepsilon), v(t, x, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\rho_0 cos(x + \alpha(t)) + O(\varepsilon),$$

где $\alpha(t) = (\varepsilon b_2 \rho_0^2 + o(\varepsilon))t, \rho_0^2 = -(\gamma b_1)$. Оно устойчиво, если $\gamma = 1 (b_1 < 0)$.

При тех же значениях b для краевой задачи (1), (3) справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача* (1),(3) *имеет одномерное устойчивое многообразие $M_1(\varepsilon)$. Динамику решений на $M_1(\varepsilon)$ определяют решения обыкновенного дифференциального уравнения*

$$y' = \gamma y + dy^2, d = 4c_1/(3\pi).$$

В частности, краевая задача (1), (3) имеет пространственно неоднородное состояние равновесия

$$u(t, x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) = \varepsilon y_0 sinx + o(\varepsilon), y_0 = -\gamma/d.$$

Оно устойчиво, если $\gamma = 1$ *и неустойчиво, если* $\gamma = -1$. При доказательстве теорем использованы результаты работы [3].

Источники и литература

1) Bradley R. M., Harper J. M. E. *Theory of ripple topography induced by ion bombardment* // J.Vac.Tech. 1988. A6. P. 2390–2395

2) Kulikov A. N., Kulikov D. A. *Bifurcations in a boundary-value problems of nanoelectronics* // Journal of Mathematical Sciences. № 208. P. 1–11.

3) Куликов А. Н., Куликов Д. А. *Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.