Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об априорных оценках и нетеровости дифференциальных операторов в анизотропных пространствах

Научный руководитель – Карапетян Гарник Альбертович

Туманян Ани Гагиковна

Аспирант

Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Кафедра математики и математического моделирования, Ереван, Армения

E-mail: ani.tumanyan92@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию нетеровости дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах на всем $\mathbb{R}^n$, и является продолжением исследований [1,4,5]. В работе исследуются априорные оценки в анизотропных соболевских пространствах, условия разрешимости соответствующих уравнений, необходимые и достаточные условия нетеровости для специальных классов полуэллиптических операторов. Вопросам нетеровости полуэллиптических операторов посвящены также работы [2,3]. С многочисленными приложениями рассматриваемых вопросов связана актуальность теории индекса полуэллиптических операторов.

Рассмотрим

$$P\left(x, \mathbb{D}\right) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1}$$

где $n, s \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}_+^n$ множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{N}^n$ множество мультииндексов с натуральными компонентами), $(\alpha:\nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + ... + \frac{\alpha_n}{\nu_n},\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n},\ D_k = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x)$ достаточно гладкие функции.

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ через $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{2}$$

Пусть $q(x)$ положительная функция такая, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$. Через $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \left\|D^\alpha u \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{3}$$

Обозначим через $(P; H^{k,\nu})$ и $(P; H_q^{k,\nu})$ операторы, порожденные дифференциальной формой $P(x, \mathbb{D})$ вида (1) и действующие, соответственно, из всего пространства $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и из всего пространства $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

В работе при ограничениях на поведение коэффициентов $P(x, \mathbb{D})$ при $|x| \to \infty$ получены критерии нетеровости для операторов $(P; H^{k,\nu})$ и $(P; H_q^{k,\nu})$. Исследованы специальные априорные оценки в весовых пространствах и установлены необдходимые для их выполнения условия на символ оператора. С использованием данных результатов доказано равенство нулю индекса полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 15T-1A197.

Источники и литература

1) Дарбинян А. А, Туманян А.Г. Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами // Вестник РАУ № 2 (2014), С. 4–14.
2) Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. матем. журн., 49:5 (2008), С. 1064–1076.
3) Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Об индексе полуэллиптического оператора // Известия НАН Арм., Мат. Т. 42. № 5 (2007), С. 33–50.
4) Tumanyan A. G. On the invariance of index of semielliptical operator on the scale of anisotropic spaces // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, V. 51, № 4 (2016), p. 187–198.
5) Tumanyan A. G. On Noethericity and index of differential operators in anisotropic weighted Sobolev spaces // Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical sciences № 3 (2016), p. 63–69.