Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О построении вариационным методом решений для некоторых классов уравнений второго порядка

Научный руководитель – Щербаков Евгений Александрович

Левашова Мария Владимировна
Аспирант
Кубанский государственный университет, Факультет математики и компьютерных наук, Краснодар, Россия
E-mail: mashunya_KS@mail.ru

Рассмотрим уравнение Бельтрами с двумя характеристиками

$$f_{\overline{z}} = q_1(z) f_z + q_2(z)\overline{f_z}. \tag{1}$$

Нами был получено, что если $q_j : C \to R, j = 1, 2$ есть непрерывно дифференцируемые функции, такие что $0 < q_2 < q_1$ и $q_1 + q_2 < 1$, тогда существует решение f уравнения (1), обладающее в наперёд заданной точке $z_0 \in C$ логарифмической особенностью, для которого имеет место следующее представление: $f = F \circ \chi^{-1}$. Здесь $\chi-$ решение уравнения Бельтрами второго рода $\chi_{\overline{\zeta}}(\zeta) = \frac{K_1-1}{K_1+1}\overline{\chi_\zeta}(\zeta)$, где $K_1 = K_1(q_1, q_2)$, а функция F - решение вариационной задачи об отыскании экстремума функционала $\Phi_\chi(z_0, z_0; K_2, f)$, $K_2 = K_2(q_1, q_2)$, определяемого по следующей формуле

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{A(r; \zeta_0, f \circ \chi)/\pi}}{r^{1/K_2(\zeta_0)}} = \Phi_\chi(z_0, z_0; K_2, f), z_0 = \chi(\zeta_0),$$

на классе квазиконформных отображений, нормированных условием $\Phi_\chi(\infty, \infty; K_2, f) = 1$. За $A(r; \xi_0, h)$ мы обозначили величину площади образа круга $|\xi - \xi_0| \le r$ при отображении h.

Хорошо известно [1,2], что вариационный метод в терминах квазиконформных отображений даёт возможность построить функцию f, обладающую следующим свойством: гармоническая функция Грина от f(D) является фундаментальным решением уравнения div (K grad U)=0 в плоскости z, имеющую логарифмическую особенность в точке z_0, где D – область, допускающая гармоническую функцию Грина. В неклассическом случае мы получили, что функция $W = w \circ \omega$, где одна из функций, по крайне мере, – решение уравнения, которое даёт фундаментальное решение, вторая – любое квазиконформное отображение без особенностей, есть (p,q)-аналитическая функция с логарифмической особенностью, а её действительная часть ReW=U – квазифундаментальное решение эллиптического уравнения для U вида

$$(pU_x)_x + (pU_y)_y + q_x U_y - q_y U_x = 0.$$

Автор работы выражает глубокую признательность научному руководителю – профессору кафедры, доктору физико-математических наук Евгению Александровичу Щербакову за постановку задачи, полезные советы и внимание к работе.

Источники и литература

1) Schiffer, M. Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings / M. Schiffer, G. Schober // Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica. – 1976. – Vol. 2. – P. 501–531.
2) Schober G. Univalent Functions - Selected Topics / G. Schober // Lecture Notes in. Mathematics. – 1975. – № 478. – 205 p.