Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Оператор свертки обобщенного оператора Данкла

Научный руководитель – Напалков Валентин Васильевич

Рахимова Алсу Ильдаровна

Аспирант

Башкирский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия

E-mail: alsu1405@mail.ru

Рассмотрим $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций, $H^*(\mathbb{C})$ — сопряженное к нему пространство. Введем в пространстве $H(\mathbb{C})$ обобщенный оператор Данкла

$$\Lambda f(z) = f'(z) + \frac{c}{z}\sum_{k=o}^{n-1}\alpha_k f(\alpha_k z),\ z \in \mathbb{C},\ f(z) \in H(\mathbb{C}),$$

где $\alpha_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}},\ k = \overline{(0; n-1)}$, n — фиксированное натуральное число, причем $n \geq 2$.

Теорема. *Обобщенный оператор Данкла отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в пространство $H(\mathbb{C})$. Он является частным случаем оператора Гельфонда-Леонтьева.*

Оператор сдвига Данкла определяется по формуле:
$S_t f(z) = f(z) + c\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{p(1)p(2)...p(m)}\Lambda^m f(z)$, где $z, t \in \mathbb{C}$. Оператор свертки Данкла имеет вид: $M_F[f](z) = (F_t, S_t f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C S_t f(z) g_F(t)dt$, где $g_F(z)$ — ассоциированная по Борелю функция к функционалу $F(z)$.

Теорема. *Множество собственных функций обобщенного оператора Данкла имеет вид:*

$$y(\lambda z) = c_0\ (1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{p(1)p(2)...p(k)}\ ),\quad c_0 = const \in \mathbb{C}.$$

При начальном условии $y(0) = d, d = const \in \mathbb{C}$ получается единственная собственная функция $y(\lambda z)$, где коэффициенты равны $c_0 = d$.

В работах [1], [2] была доказана сюръективность оператора свертки в пространстве целых функций. Для неоднородного уравнения оператора свертки при дополнительных условиях на искомую функцию возникают задача Валле–Пуссена и задача Шапиро, для их решения используется эквивалентность представления Фишера целых функций сюръективности композиции оператора свертки с операцией умножения на целую функцию.

Теорема. *Оператор свертки сюръективен в пространстве целых функций.*

Задача Шапиро состоит в нахождении представления Фишера для оператора свертки.

Теорема. *В пространстве $H(\mathbb{C})$ выполняется представление Фишера для оператора M_ϕ: $\forall f(z) \in H(\mathbb{C}) f(z) = g(z) + h(z)$, где $g(z) \in Ker M_\phi$ и $h(z) = \phi^*(z)l(z), l(z) \in H(\mathbb{C})$, где $\phi(z)$ — характеристическая функция обобщенного оператора Данкла, $\phi^*(z)$ — характеристическая функция с сопряженными коэффициентами.*

Источники и литература

1) Забирова К.Р., Напалков В.В. Операторы свёртки Данкла и многоточечная задача Валле–Пуссена // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Самара. 2013. №1 (30). С. 70-81.

2) Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. Уфа. 2014. Т. 6, №1. С. 59-68.