

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об одной математической задаче в теории колебаний упругих систем

Научный руководитель – Куликов Анатолий Николаевич

Запов Александр Сергеевич

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: yar.promo.zarov.a@gmail.com

Рассматривается нелинейная краевая задача, определенная на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$u_{tt} + (g_1 u_t + g_2 u_{t,xxxx}) + (1 - i\omega)u_{xxxx} - u_{xx}(a_1 \int_0^1 |u_x|^2 dx + a_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x|^2 dx) = 0, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \quad (2)$$

где $u = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$ - комплекснозначная функция, g_1, g_2, ω, a_{12} - некоторые положительные константы. Данная задача возникает в механике роторных систем и описывает поперечные колебания вращающегося ротора постоянного сечения из вязкоупругого материала, концы которого шарнирно закреплены. Краевая задача (1), (2) записана в перенормированном виде, коэффициенты уравнения (1) имеют вполне конкретный физический смысл. Так, например, ω - нормированная скорость вращения ротора. Краевая задача (1), (2) имеет нулевое состояние равновесие. Справедливо следующее:

Утверждение. Решение $u \equiv 0$ асимптотически устойчиво, если $\omega < \omega_*$ и теряет устойчивость, если $\omega > \omega_*$. При $\omega = \omega_*$ реализуется критический случай.

Величина $\omega_* > 0$ и определяется, как

$$\omega_* = \min \omega_n, \omega_n = \frac{g_1 + g_2(\pi n)^4}{(\pi n)^2}, n = 1, 2, 3...$$

Стоит отметить, что данный минимум реализуется на номере m , который определяется следующим образом:

$$\omega_* = \min (\omega_{m_0}, \omega_{m_0+1}), m_0 = \text{entier} \left[\frac{1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{g_1}{g_2}} \right].$$

В случае, если $\omega > \omega_*$, в частности, $\omega > \omega_k$, где ω_k - представитель последовательности $\omega_n, n = 1, 2, 3...$ справедлива следующая теорема:

Теорема. Краевая задача (1), (2) имеет автомодельное периодическое решение вида

$$u(t, x) = \eta_k \exp(i\sigma_k t) \sin(\pi k x),$$

где

$$\eta_k^2 = \frac{2}{a_1} * \frac{1}{\omega_k^2} (\omega^2 - \omega_k^2), \sigma_k = \frac{\omega(\pi k)^4}{g_1 + (\pi k)^4 g_2}, k = 1, 2, 3...$$

Источники и литература

- 1) Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости // М. Наука. 1961. С. 339
- 2) Кубышкин Е.П. Автоколебательные решения одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. No. 4. С. 674-685