Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Существование ренормализованного решения параболической задачи с мерой в правой части анизотропного уравнения

Научный руководитель – Мукминов Фарит Хамзаевич

Воробьёв Никита Александрович

Аспирант

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Лаборатория «Механика многофазных систем», Уфа, Россия

E-mail: Niksparrow@yandex.ru

Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса анизотропных параболических уравнений

$$(\beta(x,u))'_t - \mathrm{div} a(t,x,u,\nabla u) - b(t,x,u,\nabla u) = \mu \tag{1}$$

с двойными нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $(0,T)\times\Omega$. Область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ограничена. Доказано существование ренормализованного решения. За последние 20 лет появилось много работ, посвященных существованию и единственности ренормализованных решений нелинейных параболических задач. Все авторы требуют дифференциремость функции $\beta(x,u)$ по второму аргументу. В настоящей работе эта функция предполагается только каратеодориевой и возрастающей по второму аргументу. Требования на „неоднородность“ функции b, по-видимому, также минимальны, в сравнении с аналогичными результатами других авторов.

Будем предполагать, что измеримая начальная функция u_0 такова, что $\beta(x,u_0)\in L_1(\Omega)$, и при любом r функция $\beta(x,r)\in L_1(\Omega)$.

Пусть B_j - некоторые N-функции. Запишем условие коэрцитивности

$$a(t,x,r,y)\cdot y \geq \delta_0 S(y) - C_1 F(t,x),\ S(y)=\sum_{i=1}^{n} B_i(y_i),\ F\in L_1(D^T). \tag{2}$$

Пусть существуют непрерывная функция $C(m)$ и неотрицательные функции F, F_j такие, что

$$|a_j(t,x,r,y)| \leq C(m)(F_j(t,x) + \overline{B}_j^{-1}(C(m)S(y))),\ F_j\in E_{\overline{B_j}}(D^T), \tag{3}$$

при всех $r\in[-m,m]$, $y,z\in\mathbb{R}^n$, $(t,x)\in D^T$. Рассмотрены диффузные меры частного вида $\mu = f(x) - \mathrm{div} G(x)$. Здесь $f\in L_1(\Omega)$, $G_j\in E_{\overline{B_j}}(D^T)$.

Положим $b(t,x,r,y) = b(t,x,0,y) - b_0(t,x,r,y)$. Пусть $|b(t,x,0,y)|\leq F(t,x)$,

$$r b_0(t,x,r,y)\geq 0,\quad \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n;\ (t,x)\in D^T; \tag{4}$$

$$|b_0(t,x,r,y)|\leq C(m)(S(y)+F(t,x)),\ |r|\leq m;\ \forall m>0. \tag{5}$$

Теорема. Пусть выполнено условие строгой монотонности и (2)–(5).

Тогда существует ренормализованное решение первой смешанной задачи для уравнения (1).

При несколько иных условиях доказано также существование слабого решения.

[0] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (18-01-00428a)