Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 9 класса

Условия заданий, решения и ответы к ним

1. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3+1=2+2=1+3=4$ и $5+4=4+5=9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

Ответ: 9 и 15.

Решение. Число 7 не может быть квадратируемым, поскольку оба числа 1 и 6 должны находиться на третьей позиции, что невозможно.

Число 9 квадратируемо, так как числа от 1 до 9 можно расставить в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7, при этом требуемое условие выполнено.

Число 11 не квадратируемо, поскольку оба числа 11 и 4 должны стоять на пятой позиции.

Число 15 квадратируемо, поскольку можно расставить числа от 1 до 15 по убыванию, и тогда $1+15=2+14=\ldots=15+1=16$.

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая из прямого угла, разбивает его на два треугольника, у которых радиусы вписанных окружностей равны 3 и 4.

Ответ: 150.

Решение. Отношение радиусов вписанных окружностей равно коэффициенту подобия прямоугольных треугольников, на которые высота разбивает исходный треугольник. Этот коэффициент равен отношению катетов исходного треугольника. Обозначим эти катеты через $3x$ и $4x$. По теореме Пифагора гипотенуза исходного треугольника равна $5x$, а радиус вписанной в него окружности в силу подобия равен 5. Пользуясь равенством $2r=a+b-c$ для радиуса вписанной окружности (где a и b — катеты, c — гипотенуза), получаем уравнение: $10=3x+4x-5x$, откуда $x=5$. Таким образом, катеты исходного треугольника равны 15 и 20, а его площадь равна $S=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{4}{4-y^2}$ при условиях $|x|<1$, $|y|<2$ и $xy=1$.

Ответ: 4.

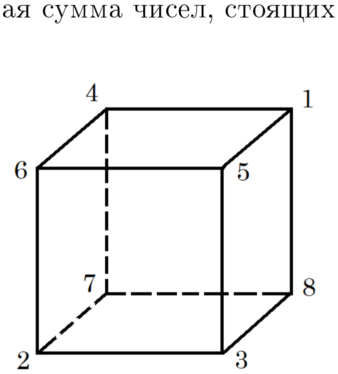
Решение. Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, при заданных условиях на x и y получаем

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{4}{4-y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{4}{4-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{5-4x^2-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}\geqslant 4,$$

причём все неравенства обращаются в равенства, если $2x=y$ и $xy=1$, т. е. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{2}$.

4. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся в одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

Ответ: 16.



Решение. В каждой грани есть вершина, в которой стоит число, не меньшее 6. Действительно, в противном случае одна из троек даже из оставшихся наибольших чисел 2, 3, 4, 5 даёт сумму, меньшую 10 (а именно тройка 2, 3, 4 с суммой 9).

Рассмотрим грань, содержащую вершину, в которой стоит число 6. Поскольку сумма чисел, стоящих в остальных трёх вершинах, не меньше 10, сумма всех чисел в вершинах этой грани не меньше 16.

Пример расстановки, при которой наименьшая сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани, равна 16, приведён на рисунке: сумма чисел в передней грани равна $2+3+5+6=16$.

5. Найдите все натуральные k, при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, т. е. квадратом целого числа.

Ответ: 101 или 2601.

Решение. Пусть $k^2 - 101k = (k-m)^2$, $m \geqslant 1$, тогда $k^2 - 101k = k^2 - 2mk + m^2$, откуда $m(2k-m) = 101k$. Поскольку число 101 простое, одно из чисел m или $2k - m$ делится на 101.

Если $m = 101s$, то получаем $s(2k - 101s) = k$, откуда

$$k = \frac{101s^2}{2s-1} = 101\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2s-1)}\right) \quad \Rightarrow \quad 4k = 202s + 101 + \frac{101}{2s-1}.$$

Значит, 101 делится на $2s-1$, что возможно только если $2s-1 = 1$ или $2s-1 = 101$, т. е. соответственно $s = 1$ или $s = 51$. В первом случае получаем $m = k = 101$, а во втором $m = 101 \cdot 51$, $k = 51^2 = 2601$.

Случай, при котором $2k - m$ делится на 101, сводится к предыдущему заменой $m_1 = 2k - m$, $m = 2k - m_1$.

6. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

Ответ: 41000.

Решение. Подсчитаем количество n-значных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5, для каждого натурального n. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим разряды этого числа в виде ячеек, в каждой из которых лежит число шаров, равное цифре, стоящей в соответствующем разряде. Разложить таким образом 4 шара по n ячейкам — это то же самое, что между 4 шарами установить $n-1$ перегородку (между некоторыми перегородками шаров может не быть вовсе). Это можно сделать $C_{n+3}^4 = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$ способами, столько же существует искомых n-значных чисел.

При $n = 1, 2, 3, 4, 5$ получаем соответственно $C_4^4 = 1$, $C_5^4 = 5$, $C_6^4 = 15$, $C_7^4 = 35$, $C_8^4 = 70$, итого 126 чисел. На 126-м месте стоит набольшее пятизначное такое число, т. е. 50000. Значит, на 125-м месте стоит предыдущее — 41000.

7. В «Драконьем покере» в колоде четыре масти. Туз приносит 1 очко, валет — 2 очка, двойка — 2^2, тройка — 2^3, ..., десятка — $2^{10} = 1024$ очка. Короли и дамы отсутствуют. Можно выбирать из колоды любое количество карт. Сколькими способами можно набрать 2018 очков?

Ответ: $C_{2021}^3 = 1373734330$.

Решение. В любой масти можно набрать любое количество очков от 0 до 2047, причём единственным образом. Это можно сделать так: надо записать это количество в двоичной системе и выбрать карты, соответствующие двоичным разрядам, содержащим 1 (т. е. если в k-м разряде стоит 1, то следует взять карту, приносящую 2^k очков).

Таким образом, задача сводится к разбиению числа 2018 на 4 неотрицательных целых слагаемых. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим искомое число способов: $C_{2021}^3 = 1373734330$.

8. Моль проела в ковре дырку в форме прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см. Найдите наименьший размер квадратной заплатки, которой можно закрыть эту дырку (заплатка закрывает дырку, если все точки прямоугольника лежат внутри квадрата или на его границе).

Ответ: $7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$ см.

Решение. Требуется найти квадрат минимального размера, внутри которого можно поместить прямоугольник 10×4 см. Если менее 4 вершин прямоугольника лежат на сторонах квадрата, то можно уменьшить размер квадрата, поворачивая его относительно прямоугольника. Пусть вершины прямоугольника A, B, C и D лежат на сторонах квадрата $EFGH$ (см. рисунок).

Треугольники AEB и BFC подобны с коэффициентом $5:2$. Обозначим $AE = 5a$, $EB = 5b$, $BF = 2a$, $FC = 2b$. Аналогично, треугольники BFC и CGD подобны с коэффициентом $2:5$, следовательно, $CG = 5a$, $GD = 5b$. Получаем, что сторона квадрата равна, с одной стороны, $5a + 2b$, а с другой стороны $2a + 5b$. Следовательно, $a = b$. Значит, острые углы треугольников равны по 45 градусов, откуда находим $a = b = \sqrt{2}$. Тогда сторона квадрата равна $7\sqrt{2}$ см.