Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2017/2018

10 – 11 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

Решения задач варианта 182

1. Автомобиль, мотоциклист и велосипедист выехали одновременно с постоянными скоростями из пункта *А* в пункт *Б*. Автомобиль, доехав до пункта *Б*, сразу же развернулся и поехал назад, встретив мотоциклиста в 9 км, а велосипедиста – в 15 км от пункта *Б*. Мотоциклист, доехав до пункта *Б*, сразу же развернулся, поехал назад и встретил велосипедиста в 12 км от пункта *Б*. Найдите расстояние между пунктами *А* и *Б* в километрах. Округлите ответ до ближайшего целого числа.

Ответ: $3\sqrt{30}$ км. Ближайшее целое: 16. **Решение.** Пусть искомое расстояние есть x (км), а скорости транспортных средств: a, b и c км/час. Приравняем время до каждой из встреч: $\frac{x+9}{a}=\frac{x-9}{b}$, $\frac{x+15}{a}=\frac{x-15}{c}$, $\frac{x+12}{b}=\frac{x-12}{c}$. Отсюда $\frac{x+9}{x-9}\cdot\frac{x+12}{x-12}\cdot\frac{x-15}{x+15}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$, что приводит к уравнению $(x+9)\left(x^2-3x-180\right)=(x-9)\left(x^2+3x-180\right) \Leftrightarrow x^2=270$, $x=3\sqrt{30}$ км.

Так как $16^2<270$, а $17^2>270$, то $16<x<17$. Так как $16{,}5^2=272{,}25>270$, то $16<x<16{,}5$, то есть ближайшим целым значением является 16. Округление до ближайшего целого можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности. В случае необоснованного округления (даже при правильном решении и ответе) за задачу ставилась оценка 10 баллов.

2. На горизонтальное дно сосуда цилиндрической формы, содержащего некоторое количество воды, положили стальной шар. Уровень воды в сосуде поднялся до высоты, равной диаметру шара. Шар вынули и положили на дно сосуда второй стальной шар размером больше первого. Уровень воды опять оказался на высоте, равной диаметру находящегося в сосуде шара.

Найдите отношение радиуса дна сосуда к радиусу первого шара, если радиус второго шара в полтора раза больше радиуса первого шара.

Ответ: $\sqrt{\frac{19}{6}}$. **Решение.** Обозначим радиус дна сосуда через R, радиусы первого и второго шаров через r и kr $(k>1)$ соответственно. Поскольку количество воды в сосуде не меняется, получаем уравнение $\pi R^2 2r-\frac{4}{3}\pi r^3=\pi R^2 2kr-\frac{4}{3}\pi k^3 r^3 \Rightarrow R^2 2r(k-1)=\frac{4}{3}r^3(k^3-1)$. Тогда $\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{2}{3}(k^2+k+1)}$, что при $k=\frac{3}{2}$ приводит к ответу $\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{19}{6}}$.

3. Шестьдесят шесть серверов одинаковой мощности должны обработать два массива информации. Вначале все они обрабатывают первый массив. В момент, когда была обработана половина первого массива, 22 сервера переключили на обработку второго массива. В момент, когда было обработано еще 25% первого массива, на обработку второго массива было переключено еще 11 серверов. После этого обработка обоих массивов была закончена одновременно. Какой массив больше и во сколько раз?

Ответ: первый массив больше в $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ раз. **Решение.** За каждый из трех этапов работы обработана 1/2, 1/4 и 1/4 первого массива соответственно. Пусть первый массив равен A (единиц информации). За время первого этапа 66 серверов обработали $\frac{A}{2}$ единиц информации в массиве I. За время второго этапа 44 сервера обработали $\frac{A}{4}$ единиц информации в массиве I, а значит, 22 сервера обработали $\frac{22}{44}\cdot\frac{A}{4}=\frac{1}{8}A$ единиц информации в массиве II.

Этапы работы	Массив I	Массив II
1 (1/2 первого массива)	66 серверов	0 серверов
2 (1/4 первого массива)	44 сервера	22 сервера
3 (1/4 первого массива)	33 сервера	33 сервера

За время третьего этапа 33 сервера обработали $\frac{A}{4}$ единиц информации массива I, а значит, другие 33 серверов обработали $\frac{A}{4}$ единиц информации массива II.

В сумме обработано A единиц информации массива I и $\frac{A}{8}+\frac{A}{4}=\frac{3}{8}A$ единиц информации массива II. Значит, первый массив больше в $A:\frac{3}{8}A=\frac{8}{3}$ раз.

4. Идеальный газ совершает циклический процесс, в котором давление и температура связаны соотношением: $T_0^2(P-5P_0)^2+P_0^2(T-10T_0)^2=4P_0^2T_0^2$, где P_0, T_0 – постоянные величины, причем реализуются все допустимые пары (P,T). Определите отношение максимального значения плотности газа к минимальному, среди достигающихся в процессе.

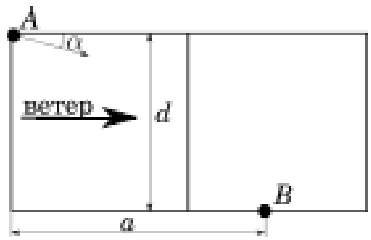
Ответ: $\frac{18}{7}$. **Решение.** Введем обозначения: $T_0^2(P-aP_0)^2+P_0^2(T-bT_0)^2=c^2P_0^2T_0^2$. В осях P/P_0, T/T_0 процесс описывается окружностью с центром $P/P_0=a$, $T/T_0=b$ радиуса *c*. Линии постоянного объема – прямые, выходящие из начала координат. Максимальному и минимальному объему соответствуют точки на окружности, касательные в которых проходят через начало координат. Значение объема связано с координатой точки соотношением $V=\nu R\frac{T}{P}=\frac{\nu RT_0}{P_0}\frac{T/T_0}{P/P_0}=\frac{\nu RT_0}{P_0}\text{ctg}\alpha$, где α – угол между изохорой и осью T/T_0.

В точках, где объем максимален (минимален), этот угол нетрудно найти из геометрических соображений: он является разностью (суммой) углов между осью T/T_0 и отрезком, проведенным из начала координат в центр окружности (β) и между этим отрезком и касательной к окружности, проведенной из начала координат (γ):

$$\text{ctg}\alpha_{\max(\min)}=\text{ctg}\left(\beta\mp\gamma\right)=\frac{\text{ctg}\beta\,\text{ctg}\gamma\pm1}{\text{ctg}\gamma\mp\text{ctg}\beta}.$$

Пусть $d=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ – длина отрезка касательной. Тогда $\text{ctg}\beta=b/a$, $\text{ctg}\gamma=d/c$, и искомое отношение: $n=\frac{1+\text{ctg}\beta\,\text{ctg}\gamma}{\text{ctg}\beta\,\text{ctg}\gamma-1}\cdot\frac{\text{ctg}\beta+\text{ctg}\gamma}{\text{ctg}\gamma-\text{ctg}\beta}=\frac{ac+bd}{bd-ac}\cdot\frac{cb+ad}{ad-cb}=\frac{18}{7}$.

5. Мяч подали из угла *A* волейбольной площадки со скоростью 20 м/с под углом α к боковой линии в направлении по ветру (вид сверху показан на рисунке). Так как вдоль площадки дует ветер, то мяч через 2 секунды оказался в точке *B* и вылетел за пределы площадки. Считая, что действующая на мяч сила сопротивления воздуха зависит от его скорости относительно воздуха и направлена точно против вектора относительной скорости мяча, определите скорость ветра. Ширина волейбольной площадки $d=9$ м, расстояние $a=16$ м, $\sin\alpha=0,6$. Вертикальным движением мяча пренебречь.



Ответ: 3,2 м/с. **Решение.** Перейдем в систему отсчета, в которой воздух покоится (то есть движущуюся со скоростью ветра *W*). Направим ось *y* вдоль краев площадки по направлению ветра, ось *x* – в перпендикулярном направлении. В покоящейся системе отсчета *x*- компонента скорости мяча в момент подачи равна $V\sin\alpha$, *y*-компонента равна $V\cos\alpha$. В системе отсчета, связанной с воздухом, *x*-компонента скорости не изменится, а *y*-компонента станет равна $V\cos\alpha - W$. В этой системе отсчета сила сопротивления и скорость коллинеарны, а значит, траектория мяча прямолинейна. То есть, если по *x* он пролетел *d*, то по *y* он переместился на $d\cdot\dfrac{V\cos\alpha - W}{V\sin\alpha}$.

В неподвижной системе отсчета смещение по *y* равно $d\cdot\dfrac{V\cos\alpha - W}{V\sin\alpha} + W\tau = a$ (по условию). Отсюда $W = \dfrac{V\left(a\sin\alpha - d\cos\alpha\right)}{V\tau\sin\alpha - d} = 3{,}2$ м/с.

Важно, что решение должно быть построено для произвольного закона силы сопротивления. Если в решении используется какой-то конкретный закон, например, постоянная сила сопротивления, при которой движение равноускоренное, или пропорциональная модулю относительной скорости, то задача оценивалась не выше 10 баллов.

6. Мешок с мукой сползает без начальной скорости по доске, наклоненной под углом $45°$ к горизонту. Соскользнув с доски, он свободно падает на горизонтальный пол и после удара скользит по нему. Коэффициент трения мешка о доску и пол равен 0,6. На каком расстоянии от места падения на пол мешок остановится, если край доски находится на высоте 0,5 м от пола, а мешок до начала движения находился на высоте 5,5 м?

Ответ: $\dfrac{77-30\sqrt{6}}{30} \approx 0{,}12$ м. **Решение.** Найдем скорость в конце наклонной плоскости: $mgH = F_{\text{тр}}\cdot L + (mV_1^2)/2$, где L – расстояние, которое мешок проезжает вдоль наклонной плоскости, равное $L = H/\sin\alpha$. Из динамики (закон Кулона-Амонтона) $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Тогда:

$$V_1^2 = 2gH - 2\mu gH\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 2gH(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha).$$

После участка свободного падения горизонтальная составляющая скорости не изменится и останется равной $V_{2x} = V_{1x} = \sqrt{2gH(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)}\cos\alpha$, а вертикальная увеличится за счет действия силы тяжести и станет равной $V_{2y} = \sqrt{V_{1y}^2 + 2gh} = \sqrt{2gH(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha + 2gh}$.

Удар неупругий, поэтому вертикальная компонента импульса мешка исчезает в результате удара. Это дает нам оценку величины импульса силы нормальной реакции опоры P_N при ударе: $P_N = mV_{2y}$; импульс силы трения за время удара (предполагаем, что скольжение не прекращается): $P_f = \mu P_N = \mu m V_{2y}$.

Это позволяет узнать, на сколько изменилась горизонтальная компонента импульса мешка за время удара: $P_f = m(V_{2x} - U)$, $U = V_{2x} - \mu V_{2y}$, где U – скорость мешка после удара.

Далее кинетическая энергия мешка $(mU^2)/2$ полностью перейдет в работу силы трения, и он остановится, пройдя искомое расстояние S: $(mU^2)/2 = \mu mgS$, $S = U^2/(2\mu g)$,

$S = \dfrac{1}{\mu}\left[V_{2x}^2 + \mu^2 V_{2y}^2 - 2\mu V_{2y} V_{2x}\right]$. Отсюда:

$$S = \frac{H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)(\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha) + \mu^2 h}{\mu} - 2\cos\alpha\sqrt{H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\left(H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha + h\right)}.$$

Подставляя сюда $H = 5$, $h = 0,5$, $\mu = 0,6$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, получаем $S = \dfrac{77 - 30\sqrt{6}}{30} \approx 0,12$ м.