Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2017/2018

10 – 11 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

Решения задач варианта 184

1. Автомобиль, мотоциклист и велосипедист выехали одновременно с постоянными скоростями из пункта *А* в пункт *Б*. Автомобиль, доехав до пункта *Б*, сразу же развернулся и поехал назад, встретив мотоциклиста в 15 км, а велосипедиста – в 25 км от пункта *Б*. Мотоциклист, доехав до пункта *Б*, сразу же развернулся, поехал назад и встретил велосипедиста в 16 км от пункта *Б*. Найдите расстояние между пунктами *А* и *Б* в километрах. Округлите ответ до ближайшего целого числа.

Ответ: $10\sqrt{10}$ км. Ближайшее целое: 32. **Решение.** Пусть искомое расстояние x (км), а скорости транспортных средств: a, b и c км/час. Приравняем время до каждой из встреч: $\frac{x+15}{a}=\frac{x-15}{b}$, $\frac{x+25}{a}=\frac{x-25}{c}$, $\frac{x+16}{b}=\frac{x-16}{c}$. Значит, $\frac{x+15}{x-15}\cdot\frac{x+16}{x-16}\cdot\frac{x-25}{x+25}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$, откуда следует уравнение $(x+15)(x^2-9x-400)=(x-15)(x^2+9x-400)$ $\Leftrightarrow$ $x^2=1000$, $x=10\sqrt{10}$ км.

Так как $31^2<1000$, а $32^2>1000$, то $31<x<32$. Так как $31,5^2=992,25<1000$, то $31,5<x<32$, то есть ближайшим целым значением является 32. Округление до ближайшего целого можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности. В случае необоснованного округления (даже при правильном решении и ответе) за задачу ставилась оценка 10 баллов.

2. На горизонтальное дно сосуда цилиндрической формы, содержащего некоторое количество воды, положили стальной шар. Уровень воды в сосуде поднялся до высоты, равной диаметру шара. Шар вынули и положили на дно сосуда второй стальной шар размером больше первого. Уровень воды опять оказался на высоте, равной диаметру находящегося в сосуде шара.

Найдите отношение радиуса дна сосуда к радиусу первого шара, если радиус второго шара в полтора раза больше радиуса первого шара.

Ответ: $\sqrt{\frac{19}{6}}$. **Решение.** Обозначим радиус дна сосуда через R, радиусы первого и второго шаров через r и kr $(k>1)$ соответственно. Поскольку количество воды в сосуде не меняется, получаем уравнение $\pi R^2 2r-\frac{4}{3}\pi r^3=\pi R^2 2kr-\frac{4}{3}\pi k^3 r^3 \Rightarrow R^2 2r(k-1)=\frac{4}{3}r^3(k^3-1)$. Тогда $\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{2}{3}(k^2+k+1)}$, что при $k=\frac{3}{2}$ приводит к ответу $\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{19}{6}}$.

3. В жаркий летний день, когда на улице было $24°C$, Гаврила увидел в кондитерской пирожное, на котором было указано, что срок годности при температуре $4°C$ составляет 30 часов, а при температуре $10°C$ – 20 часов. Гаврила выяснил, что от момента, когда пирожное было изготовлено, прошло 16 часов и все это время соблюдалась температура $10°C$. Купив пирожное, Гаврила поехал на дачу, дорога на которую занимает 3 часа. Безопасно ли будет съесть пирожное по прибытии, если оно портится при превышении количества содержащихся бактерий определенного критического уровня, при этом темпы размножения бактерий линейно зависят от температуры? После покупки пирожное все время находилось при уличной температуре.

Ответ: Небезопасно. **Решение.** Пирожное испортится, если произойдет определенное количество удвоений численности бактерий. По условию темпы размножения (k – число делений в единицу времени) линейно зависят от температуры: $k=a\theta+b$, θ – температура. Пирожное портится, если произойдет определенное число делений N, то есть срок годности $T(\theta)$ находится из соотношения $N=kT=(a\theta+b)T$, откуда

$$T=\frac{N}{a\theta+b}=\frac{1}{\alpha\theta+\beta}.$$

Неизвестные константы найдем из условия задачи:

$$\alpha=\frac{T_1-T_2}{T_2T_1(\theta_2-\theta_1)}=\frac{1}{360},\ \beta=\frac{T_2\theta_2-T_1\theta_1}{T_2T_1(\theta_2-\theta_1)}=\frac{1}{45}.$$

Таким образом, $T=\frac{1}{\frac{\theta}{360}+\frac{1}{45}}=\frac{360}{\theta+8}$, и при $\theta=24°C$ срок годности составит 45/4 часа.

Таким образом, пирожное до съедения проведет $\frac{16}{20}+\frac{3\cdot 4}{45}=\frac{16}{15}>1$.

Следовательно, пирожное есть небезопасно.

4. Идеальный газ совершает циклический процесс, в котором давление и температура связаны соотношением: $T_0^2(P-6P_0)^2+P_0^2(T-17T_0)^2=P_0^2T_0^2$, где P_0, T_0 – постоянные величины, причем реализуются все допустимые пары (P,T). Определите отношение максимального значения плотности газа к минимальному, среди достигающихся в процессе.

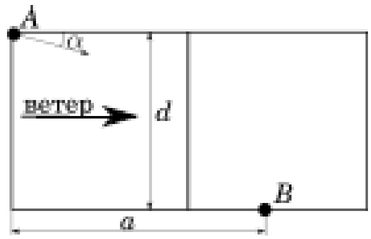
Ответ: $\frac{10}{7}$. **Решение.** Введем обозначения: $T_0^2(P-aP_0)^2+P_0^2(T-bT_0)^2=c^2P_0^2T_0^2$. В осях P/P_0, T/T_0 процесс описывается окружностью с центром $P/P_0=a$, $T/T_0=b$ радиуса *c*. Линии постоянного объема – прямые, выходящие из начала координат. Максимальному и минимальному объему соответствуют точки на окружности, касательные в которых проходят через начало координат. Значение объема связано с координатой точки соотношением $V=\nu R\frac{T}{P}=\frac{\nu RT_0}{P_0}\frac{T/T_0}{P/P_0}=\frac{\nu RT_0}{P_0}\mathrm{ctg}\alpha$, где α – угол между изохорой и осью T/T_0.

В точках, где объем максимален (минимален), этот угол нетрудно найти из геометрических соображений: он является разностью (суммой) углов между осью T/T_0 и отрезком, проведенным из начала координат в центр окружности (β) и между этим отрезком и касательной к окружности, проведенной из начала координат (γ):

$$\mathrm{ctg}\alpha_{\max(\min)}=\mathrm{ctg}\left(\beta\mp\gamma\right)=\frac{\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma\pm1}{\mathrm{ctg}\gamma\mp\mathrm{ctg}\beta}.$$

Пусть $d=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ – длина отрезка касательной. Тогда $\mathrm{ctg}\beta=b/a$, $\mathrm{ctg}\gamma=d/c$, и искомое отношение: $n=\frac{1+\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma-1}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}\gamma-\mathrm{ctg}\beta}=\frac{ac+bd}{bd-ac}\cdot\frac{cb+ad}{ad-cb}=\frac{10}{7}$.

5. Мяч подали из угла *A* волейбольной площадки со скоростью 20 м/с, под углом α к боковой линии в направлении по ветру (вид сверху показан на рисунке). Так как вдоль площадки дует ветер, то мяч через 2 секунды оказался в точке *B* и вылетел за пределы площадки. Считая, что действующая на мяч сила сопротивления воздуха зависит от его скорости относительно воздуха и направлена точно против вектора относительной скорости мяча, определите скорость ветра. Ширина волейбольной площадки $d=9$ м, расстояние $a=15$ м, $\sin\alpha=0,6$. Вертикальным движением мяча пренебречь.



Ответ: 2,4 м/с. **Решение.** Перейдем в систему отсчета, в которой воздух покоится (то есть движущуюся со скоростью ветра *W*). Направим ось *y* вдоль краев площадки по направлению ветра, ось *x* – в перпендикулярном направлении. В покоящейся системе отсчета *x*- компонента скорости мяча в момент подачи равна $V\sin\alpha$, *y*-компонента равна $V\cos\alpha$. В системе отсчета, связанной с воздухом, *x*-компонента скорости не изменится, а *y*-компонента станет равна

$V\cos\alpha - W$. В этой системе отсчета сила сопротивления и скорость коллинеарны, а значит, траектория мяча прямолинейна. То есть, если по *x* он пролетел *d*, то по *y* он переместился на $d\cdot\dfrac{V\cos\alpha - W}{V\sin\alpha}$.

В неподвижной системе отсчета смещение по *y* равно $d\cdot\dfrac{V\cos\alpha - W}{V\sin\alpha} + W\tau = a$ (по условию). Отсюда $W = \dfrac{V\left(a\sin\alpha - d\cos\alpha\right)}{V\tau\sin\alpha - d} = 2,4$ м/с.

Важно, что решение должно быть построено для произвольного закона силы сопротивления. Если в решении используется какой-то конкретный закон, например, постоянная сила сопротивления, при которой движение равноускоренное, или пропорциональная модулю относительной скорости, то задача оценивалась не выше 10 баллов.

6. Мешок с мукой сползает без начальной скорости по доске, наклоненной под углом $45°$ к горизонту. Соскользнув с доски, он свободно падает на горизонтальный пол и после удара скользит по нему. Коэффициент трения мешка о доску и пол равен 0,4. На каком расстоянии от места падения на пол мешок остановится, если край доски находится на высоте 0,5 м от пола, а мешок до начала движения находился на высоте 2,5 м?

Ответ: $\dfrac{97-10\sqrt{66}}{50} \approx 0,32$ м. **Решение.** Найдем скорость в конце наклонной плоскости: $mgH = F_{\text{тр}}\cdot L + (mV_1^2)/2$, где L – расстояние, которое мешок проезжает вдоль наклонной плоскости, равное $L = H/\sin\alpha$. Из динамики (закон Кулона-Амонтона) $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Тогда:

$$V_1^2 = 2gH - 2\mu gH\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 2gH(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha).$$

После участка свободного падения горизонтальная составляющая скорости не изменится и останется равной $V_{2x} = V_{1x} = \sqrt{2gH(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}\cos\alpha$, а вертикальная увеличится за счет действия силы тяжести и станет равной $V_{2y} = \sqrt{V_{1y}^2 + 2gh} = \sqrt{2gH(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\sin^2\alpha + 2gh}$.

Удар неупругий, поэтому вертикальная компонента импульса мешка исчезает в результате удара. Это дает нам оценку величины импульса силы нормальной реакции опоры P_N при ударе: $P_N = mV_{2y}$; импульс силы трения за время удара (предполагаем, что скольжение не прекращается): $P_f = \mu P_N = \mu m V_{2y}$.

Это позволяет узнать, на сколько изменилась горизонтальная компонента импульса мешка за время удара: $P_f = m(V_{2x} - U)$, $U = V_{2x} - \mu V_{2y}$, где U – скорость мешка после удара.

Далее кинетическая энергия мешка $(mU^2)/2$ полностью перейдет в работу силы трения, и он остановится, пройдя искомое расстояние S: $(mU^2)/2 = \mu mgS$, $S = U^2/(2\mu g)$,

$S = \dfrac{1}{\mu}\left[V_{2x}^2 + \mu^2 V_{2y}^2 - 2\mu V_{2y} V_{2x}\right]$. Отсюда:

$$S = \frac{H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)(\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha) + \mu^2 h}{\mu} - 2\cos\alpha\sqrt{H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\left(H(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha + h\right)}.$$

Подставляя сюда $H = 2$, $h = 0,5$, $\mu = 0,4$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, получаем $S = \dfrac{97 - 10\sqrt{66}}{50} \approx 0,32$ м.