

10 – 11 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.

Решения задач варианта 181

1. Автомобиль, мотоциклист и велосипедист выехали одновременно с постоянными скоростями из пункта A в пункт B . Автомобиль, доехав до пункта B , сразу же развернулся и поехал назад, встретив мотоциклиста в 10 км, а велосипедиста – в 20 км от пункта B . Мотоциклист, доехав до пункта B , сразу же развернулся, поехал назад и встретил велосипедиста в 15 км от пункта B . Найдите расстояние между пунктами A и B в километрах. Округлите ответ до ближайшего целого числа.

Ответ: $10\sqrt{6}$ км. Ближайшее целое: 24. **Решение.** Пусть искомое расстояние есть x (км), а скорости транспортных средств: a , b и c км/час. Приравняем время до каждой из встреч:

$\frac{x+10}{a} = \frac{x-10}{b}$, $\frac{x+20}{a} = \frac{x-20}{c}$, $\frac{x+15}{b} = \frac{x-15}{c}$. Отсюда $\frac{x+10}{x-10} \cdot \frac{x+15}{x-15} \cdot \frac{x-20}{x+20} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$, что приводит к уравнению $(x+10)(x^2 - 5x - 300) = (x-10)(x^2 + 5x - 300) \Leftrightarrow x^2 = 600$, $x = 10\sqrt{6}$ км.

Так как $24^2 < 600$, а $25^2 > 600$, то $24 < x < 25$. Так как $24,5^2 = 600,25 > 600$, то $24 < x < 24,5$, то есть ближайшим целым значением является 24. Округление до ближайшего целого можно проводить разными способами. Главное требование: оно должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности. В случае необоснованного округления (даже при правильном решении и ответе) за задачу ставилась оценка 10 баллов.

2. На горизонтальное дно сосуда цилиндрической формы, содержащего некоторое количество воды, положили стальной шар. Уровень воды в сосуде поднялся до высоты, равной диаметру шара. Шар вынули и положили на дно сосуда второй стальной шар размером больше первого. Уровень воды опять оказался на высоте, равной диаметру находящегося в сосуде шара.

Найдите отношение радиуса дна сосуда к радиусу первого шара, если радиус второго шара в два раза больше радиуса первого шара.

Ответ: $\sqrt{\frac{14}{3}}$. **Решение.** Обозначим радиус дна сосуда через R , радиусы первого и

второго шаров через r и kr ($k > 1$) соответственно. Поскольку количество воды в сосуде не

меняется, получаем уравнение $\pi R^2 2r - \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi R^2 2kr - \frac{4}{3} \pi k^3 r^3 \Rightarrow R^2 2r(k-1) = \frac{4}{3} r^3 (k^3 - 1)$.

Тогда $\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}(k^2 + k + 1)}$, что при $k = 2$ приводит к ответу $\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

3. Семьдесят семь серверов одинаковой мощности должны обработать два массива информации. Вначале все они обрабатывают первый массив. В момент, когда было обработано 25% первого массива, 33 сервера переключили на обработку второго массива. В момент, когда было обработано еще 25% первого массива, на обработку второго массива было переключено еще 33 сервера. После этого обработка обоих массивов была закончена одновременно. Какой массив больше и во сколько раз?

Ответ: второй массив больше в $\frac{51}{16} = 3\frac{3}{16} = 3,1875$ раз. **Решение.** За каждый из трех

этапов работы обработано $1/4$, $1/4$ и $1/2$ первого массива соответственно. Пусть первый массив

равен A (единиц информации). За время первого этапа 77 серверов обработали $\frac{A}{4}$ единиц

информации в массиве I. За время второго этапа 44 сервера обработали $\frac{A}{4}$ единиц информации

в массиве I, а значит, 33 сервера обработали $\frac{33}{44} \cdot \frac{A}{4} = \frac{3}{16} A$ единиц информации в массиве II.

Этапы работы	Массив I	Массив II
1 ($1/4$ первого массива)	77 серверов	0 серверов
2 ($1/4$ первого массива)	44 сервера	33 сервера
3 ($1/2$ первого массива)	11 серверов	66 серверов

За время третьего этапа 11 серверов обработали $\frac{A}{2}$ единиц информации массива I, а

значит, 66 серверов обработали $\frac{66}{11} \cdot \frac{A}{2} = 3A$ единиц информации массива II.

В сумме обработано A единиц информации массива I и $\frac{3}{16} A + 3A = \frac{51}{16} A$ единиц

информации массива II. Значит, второй массив в $\frac{51}{16}$ раз больше.

4. Идеальный газ совершает циклический процесс, в котором давление и температура связаны соотношением: $T_0^2(P - 4P_0)^2 + P_0^2(T - 7T_0)^2 = P_0^2T_0^2$, где P_0, T_0 – постоянные величины, причем реализуются все допустимые пары (P, T) . Определите отношение максимального значения объема газа к минимальному, среди достигающихся в процессе.

Ответ: $\frac{9}{5}$. **Решение.** Введем обозначения: $T_0^2(P - aP_0)^2 + P_0^2(T - bT_0)^2 = c^2P_0^2T_0^2$. В осях

$P/P_0, T/T_0$ процесс описывается окружностью с центром $P/P_0 = a, T/T_0 = b$ радиуса c .

Линии постоянного объема – прямые, выходящие из начала координат. Максимальному и минимальному объему соответствуют точки на окружности, касательные в которых проходят через начало координат. Значение объема связано с координатой точки соотношением

$$V = \nu R \frac{T}{P} = \frac{\nu R T_0}{P_0} \frac{T/T_0}{P/P_0} = \frac{\nu R T_0}{P_0} \operatorname{ctg} \alpha, \text{ где } \alpha \text{ – угол между изохорой и осью } T/T_0.$$

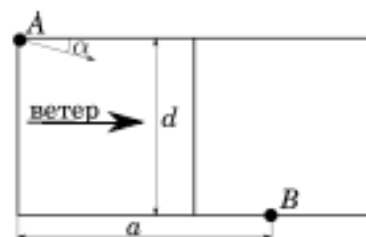
В точках, где объем максимален (минимален), этот угол нетрудно найти из геометрических соображений: он является разностью (суммой) углов между осью T/T_0 и отрезком, проведенным из начала координат в центр окружности (β) и между этим отрезком и касательной к окружности, проведенной из начала координат (γ):

$$\operatorname{ctg} \alpha_{\max(\min)} = \operatorname{ctg}(\beta \mp \gamma) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma \pm 1}{\operatorname{ctg} \gamma \mp \operatorname{ctg} \beta}.$$

Пусть $d = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ – длина отрезка касательной. Тогда $\operatorname{ctg} \beta = b/a, \operatorname{ctg} \gamma = d/c$, и

искоемое отношение:
$$n = \frac{1 + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - 1} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{ac + bd}{bd - ac} \cdot \frac{cb + ad}{ad - cb} = \frac{9}{5}.$$

5. Мяч подали из угла A волейбольной площадки со скоростью 15 м/с, под углом α к боковой линии в направлении по ветру (вид сверху показан на рисунке). Так как вдоль площадки дует ветер, то мяч через 1,5 секунды оказался в точке B и вылетел за пределы площадки. Считая, что действующая на мяч сила сопротивления воздуха зависит от его скорости относительно воздуха и направлена точно против вектора относительной скорости мяча, определите скорость ветра. Ширина волейбольной площадки $d = 9$ м, расстояние $a = 13$ м, $\sin \alpha = 0,6$. Вертикальным движением мяча пренебречь.



Ответ: 2 м/с. **Решение.** Перейдем в систему отсчета, в которой воздух покоится (то есть движущуюся со скоростью ветра W). Направим ось y вдоль краев площадки по направлению ветра, ось x – в перпендикулярном направлении. В покоящейся системе отсчета x -компонента скорости мяча в момент подачи равна $V \sin \alpha$, y -компонента равна $V \cos \alpha$. В системе отсчета,

связанной с воздухом, x -компонента скорости не изменится, а y -компонента станет равна $V \cos \alpha - W$. В этой системе отсчета сила сопротивления и скорость коллинеарны, а значит, траектория мяча прямолинейна. То есть, если по x он пролетел d , то по y он переместился на $d \cdot \frac{V \cos \alpha - W}{V \sin \alpha}$.

В неподвижной системе отсчета смещение по y равно $d \cdot \frac{V \cos \alpha - W}{V \sin \alpha} + W\tau = a$ (по условию). Отсюда $W = \frac{V(a \sin \alpha - d \cos \alpha)}{V\tau \sin \alpha - d} = 2$ м/с.

Важно, что решение должно быть построено для произвольного закона силы сопротивления. Если в решении используется какой-то конкретный закон, например, постоянная сила сопротивления, при которой движение равноускоренное, или пропорциональная модулю относительной скорости, то задача оценивалась не выше 10 баллов.

6. Мешок с мукой сползает без начальной скорости по доске, наклоненной под углом 45° к горизонту. Соскользнув с доски, он свободно падает на горизонтальный пол и после удара скользит по нему. Коэффициент трения мешка о доску и пол равен 0,5. На каком расстоянии от места падения на пол мешок остановится, если край доски находится на высоте 0,5 м от пола, а мешок до начала движения находился на высоте 3,5 м?

Ответ: $\frac{17-4\sqrt{15}}{8} \approx 0,19$ м. **Решение.** Найдём скорость в конце наклонной плоскости:

$mgH = F_{\text{тр}} \cdot L + (mV_1^2)/2$, где L – расстояние, которое мешок проезжает вдоль наклонной плоскости, равное $L = H / \sin \alpha$. Из динамики (закон Кулона-Амонтона) $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$. Тогда:

$$V_1^2 = 2gH - 2\mu gH \cdot \text{ctg} \alpha = 2gH(1 - \mu \text{ctg} \alpha).$$

После участка свободного падения горизонтальная составляющая скорости не изменится и останется равной $V_{2x} = V_{1x} = \sqrt{2gH(1 - \mu \text{ctg} \alpha)} \cos \alpha$, а вертикальная увеличится за счёт действия силы тяжести и станет равной $V_{2y} = \sqrt{V_{1y}^2 + 2gh} = \sqrt{2gH(1 - \mu \text{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha + 2gh}$.

Удар неупругий, поэтому вертикальная компонента импульса мешка исчезает в результате удара. Это даёт нам оценку величины импульса силы нормальной реакции опоры P_N при ударе: $P_N = mV_{2y}$; импульс силы трения за время удара (предполагаем, что скольжение не прекращается): $P_f = \mu P_N = \mu mV_{2y}$.

Это позволяет узнать, на сколько изменилась горизонтальная компонента импульса мешка за время удара: $P_f = m(V_{2x} - U)$, $U = V_{2x} - \mu V_{2y}$, где U – скорость мешка после удара.

Далее кинетическая энергия мешка $(mU^2)/2$ полностью перейдет в работу силы трения, и он остановится, пройдя искомое расстояние S : $(mU^2)/2 = \mu mgS$, $S = U^2 / (2\mu g)$,

$$S = \frac{1}{\mu} [V_{2x}^2 + \mu^2 V_{2y}^2 - 2\mu V_{2y} V_{2x}]. \text{ Отсюда:}$$

$$S = \frac{H(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)(\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha) + \mu^2 h}{\mu} - 2 \cos \alpha \sqrt{H(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)(H(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha + h)}.$$

Подставляя сюда $H = 3$, $h = 0,5$, $\mu = 0,5$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, получаем $S = \frac{17 - 4\sqrt{15}}{8} \approx 0,19$ м.