

Задача 1. Разность

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|}$$

является целым числом. Найти это число.

Решение.

Сравним числа:

$$12\sqrt{5} \text{ и } 29 \Rightarrow \sqrt{720} \text{ и } \sqrt{841} \Rightarrow 12\sqrt{5} < 29.$$

С учетом этого перепишем:

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|} = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

Т.к. по условию это целое число, тогда обозначим его через x

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} = x \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} \right)^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$29 - 12\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} \cdot \sqrt{12\sqrt{5} + 29} + 12\sqrt{5} + 29 = x^2 \Rightarrow$$

$$58 - 2\sqrt{841 - 720} = x^2 \Rightarrow$$

$$58 - 22 = x^2.$$

Т.к. изначально первое слагаемое меньше второго, то число отрицательное.

Ответ: -6 .

Задача 2. Решить неравенство:

$$f(g(x)) < g(f(x)), \text{ где } f(x) = 2^x, g(x) = 4^x.$$

Решение. Имеем

$$f(g(x)) < g(f(x)), \text{ где } f(x) = 2^x, g(x) = 4^x \Rightarrow$$

$$f(4^x) < g(2^x) \Rightarrow$$

$$2^{4^x} < 4^{2^x} \Rightarrow$$

$$2^{2^{2x}} < 2^{2 \cdot 2^x}.$$

Прологарифмируем неравенство по основанию 2 :

$$2^{2x} < 2 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\text{обозначим } t = 2^x \Rightarrow$$

$$t^2 - 2t < 0 \Rightarrow$$

$$t \in (0, 2) \Rightarrow$$

$$x < 1.$$

Ответ: $x < 1$.

Задача 3. Даны функции $y_1(x) = -2x^2 + 7x + 3$ и $y_2(x) = \sqrt{3}x + b$. При каком значении параметра b максимальное значение выражения $|y_1(x) - y_2(x)|$ при $x \in [-1, \sqrt{3}]$ будет минимальным?

Решение.

Рассмотрим разность функции:

$$f(x) = y_1(x) - y_2(x) = -2x^2 + 7x + 3 - \sqrt{3}x - b,$$

здесь параметр b отвечает за сдвиг функции по оси ординат. Следовательно надо подобрать b таким образом, чтобы $|f_{\max}(x)| = |f_{\min}(x)|$ на $[-1, \sqrt{3}]$. Для этого рассмотрим параболу

$$g(x) = -2x^2 + 7x + 3 - \sqrt{3}x \text{ при } x \in [-1, \sqrt{3}],$$

очевидно, что минимум будет в точке $x = -1$, а максимум в вершине $\frac{7-\sqrt{3}}{4}$.

Далее находим b из уравнения

$$|g(-1) - b| = \left| g\left(\frac{7-\sqrt{3}}{4}\right) - b \right| \Rightarrow$$

$$|\sqrt{3} - 6 - b| = \left| \frac{19}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{4} - b \right| \Rightarrow$$

$$b = 1.75 - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $b = 1.75 - \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Задача 4. Василий хочет открыть вклад в размере 4759013 рублей 12 копеек сроком на 1 год и выбирает один из двух банков. В первом банке проценты по вкладу начисляются один раз в два месяца в размере 15% годовых (то есть 2.5% за два месяца). Во втором банке проценты начисляются по 1% в месяц в течение 6 первых месяцев и по 1.5% в месяц за каждый из оставшихся месяцев. Определить в каком из банков более выгодные условия.

Решение.

Пусть $x = 4759013.12$, тогда для первого банка имеем

$$x(1 + 0.025)^6,$$

а для второго банка

$$x(1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6.$$

Сравним

$$x(1 + 0.025)^6 \text{ и } x(1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6 \Rightarrow$$

$$(1 + 0.025)^6 \text{ и } (1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6 \Rightarrow$$

$$(1 + 0.025) \text{ и } (1 + 0.01)(1 + 0.015) \Rightarrow$$

$$1 + 0.025 \text{ и } 1 + 0.01 + 0.015 + 0.01 \cdot 0.015 \Rightarrow$$

$$0 \text{ и } 0.01 \cdot 0.015$$

Вывод - во втором банке выгоднее.

Ответ: второй банк.

Задача 5. Спрос населения города Ф. на городские автобусные перевозки описывается уравнением $Q_D = 150 - 2P$, а предложение автоперевозчиков в городе – уравнением $Q_S = 30 + 2P$ (количество Q_D , Q_S измеряется в тысячах поездок, совершаемых в день, а цена P – в рублях). На этом рынке давно уже существует высокий уровень конкуренции, и плата за проезд определяется спросом и предложением. С начала апреля этого года администрация города решила сделать поездки на автобусах более доступными и распорядилась выплачивать автобусным перевозчикам субсидию в размере 8 рублей на каждую поездку, при условии, что цена поездки станет для пассажира дешевле на эту же сумму. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

- А) Сколько стоил проезд в городском транспорте до решения администрации о субсидии? Сколько поездок ежедневно совершалось в городских автобусах?
- Б) Какой будет новая равновесная цена проезда, и сколько поездок будет совершаться в автобусах после введения субсидии? Чем можно объяснить такое изменение платы за проезд и числа поездок?
- В) Какую сумму должна будет израсходовать администрация города на выплату субсидий автобусным перевозчикам по итогам апреля?

Решения и ответы.

А) Находим рыночное равновесие: $150 - 2P = 30 + 2P$, $P = 30$ руб. за поездку, $Q = 90$ тыс. поездок в день.

Б) После введения субсидии появится разница в цене для покупателя и продавца: $P_S = P_D + 8$ (перевозчик за поездку получает сумму P_D от пассажира и субсидию 8 руб.).

Если цена за проезд составит $30 - 8 = 22$ руб., то на рынке перевозок появится дефицит (население будет готово совершить 106 тыс. поездок). Поэтому в итоге цена окажется выше 22 руб. за поездку. Находим новое равновесие:

$150 - 2P_D = 30 + 2(P_D + 8)$, $P_D = 26$ руб., $Q = 98$ тыс. поездок (количество поездок увеличилось в связи со снижением платы за проезд).

В) Администрация города платит 8 руб. за каждую поездку, в течение апреля (30 дней) нужно будет выплатить $98 \text{ тыс. поездок} \cdot 8 \text{ руб.} \cdot 30 \text{ дней} = 23,5 \text{ млн. руб.}$

Задача 6. Строительная компания «Строймаркет» выполняет отделочные работы в жилых и офисных помещениях. Одновременно компания может работать не более чем на 6 объектах (на большее количество объектов не хватает ни рабочих, ни оборудования). Чем больше объектов ведет компания,

тем выше ее суммарные издержки (см. таблицу). Сейчас средняя рыночная цена на отделочные работы, выполняемые компанией, составляет 70 тыс. руб. за 1 объект. Компания ведет работы на 5 объектах.

| | Количество объектов, где ведутся работы | | | | | | |
|---------------------------|-----------------------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Общие издержки, тыс. руб. | 60 | 90 | 125 | 165 | 220 | 280 | 360 |

Ответьте на вопросы и объясните свой ответ.

А) Можно ли считать, что решение компании об объеме работ является оптимальным? Почему? Сколько составляет прибыль компании?

Б) Если в компанию обратится новый заказчик и предложит провести такие же работы на еще одном объекте за 75 тыс. рублей, следует ли принять его предложение? Почему?

Ответы и решения

Проведем необходимые расчеты:

| | Количество объектов, где ведутся работы | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Общие издержки, тыс. руб. | 60 | 90 | 125 | 165 | 220 | 280 | 360 |
| Предельные издержки, тыс. руб. | — | 30 | 35 | 40 | 55 | 60 | 80 |
| Выручка при цене 70 тыс. руб. | 0 | 70 | 140 | 210 | 280 | 350 | 420 |
| Прибыль, тыс. руб. | -60 | -20 | 15 | 45 | 60 | 70 | 60 |

А) Работа на 5 объектах – оптимальное решение для компании, поскольку она в этом случае получает наибольшую прибыль (70 тыс. руб.) (вариант: предельные издержки работы на 5-м объекте составляют 60 тыс. руб., а на 6-м – уже 80 тыс. руб., значит при 5 объектах компания ближе всего к «золотому правилу» выпуска $P=MC$)

Б) Если новый заказчик предложит заплатить 75 тыс. руб. за объект, для компании этот объект окажется 6-м. Предельные издержки работы компании на 6-м объекте составляют 80 тыс. руб. ($360-280=80$ тыс. руб.), это выше предложенной цены. Если компания примет это предложение, то ее суммарная прибыль уменьшится. С точки зрения получения прибыли принимать этот заказ нерационально (вариант: издержки компании при 6 объектах составляют 360 тыс. руб., а выручка составит $70 \cdot 5 + 75 = 425$ тыс. руб., прибыль составит $425 - 360 = 65$ тыс. руб., то есть на 5 тыс. руб. меньше, чем при работе на 5 объектах).

Задача 7. Известно, что население страны К. в течение года совершило покупки товаров (как произведенных внутри страны, так и импортных) и услуг для собственного потребления на сумму 500 млн. денежных единиц (д.е.). При этом компании, работающие в стране, израсходовали 200 млн. д.е. на новое оборудование и 160 млн. д.е. на закупку сырья и полуфабрикатов для переработки. Государственные органы закупили товаров и услуг на сумму 150 млн. д.е. Таможенная служба страны К. по итогам года подсчитала, что экспорт составил 80 млн. д.е., а импорт был на сумму 60 млн. д.е. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

А) Сколько составляет ВВП в этой стране? Поясните, каким методом расчета ВВП вы воспользовались.

Б) В прошлом году номинальный ВВП страны К. составлял 850 млн. д.е. Можно ли утверждать, что в этом году в стране наблюдался экономический рост, или для этого недостаточно данных?

Решения и ответы

№ 3. А) Рассчитаем ВВП страны по расходам (суммируем расходы на приобретение конечной продукции, произведенной внутри страны): расходы населения + инвестиции компаний + государственные закупки + экспорт – импорт. $500 + 200 + 150 + 80 - 60 = 870$ млн. д.е. (сумму 160 млн. д.е. не включаем в расчет, т.к. это покупка промежуточной продукции).

Б) $850 < 870$ млн. д.е., однако эти суммы – номинальные величины (ВВП мог вырасти из-за роста цен, а не из-за роста производства товаров и услуг). Чтобы определить, был ли в стране экономический рост, нужно знать индекс цен (дефлятор ВВП).