

Секция «Математика и механика»

Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений относительно функций
бесконечномерного аргумента

Ремизов Иван Дмитриевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ivremizov@yandex.ru

Сообщение посвящено представлению формулами Фейнмана решения задачи Коши для параболического уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, зависящими от бесконечномерной пространственной координаты, но не зависящими от времени.

Эволюционное уравнение вида $\frac{\partial}{\partial t} f = Lf$ можно интерпретировать как математическую модель процесса распространения тепла или диффузии в анизотропной неоднородной стационарной среде. Пусть процесс диффузии рассматривается в подмножестве G линейного пространства H . Формулой Фейнмана называется равенство

$$f(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \dots \int_G N_1(t, x_1) \dots N_n(t, x_n) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n),$$

в котором $f(t, x)$ — решение эволюционного уравнения, N_k — некоторые определённые на $\mathbb{R}_+ \times G$ функции, а μ — мера в G ; в правой части равенства стоит предел кратного интеграла при безграничном увеличении его кратности.

В конечномерном пространстве H формулы Фейнмана для уравнения с переменными коэффициентами доказаны в [1] и [2]. В предположении $\dim H = \infty$ формулы Фейнмана рассматривались в [3], но только для случая постоянного коэффициента при старшей производной. В настоящем сообщении сформулировано предложение о возможном виде формул Фейнмана для уравнения с переменными коэффициентами в случае $\dim H = \infty$.

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Символами $\nabla\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ обозначим первую и вторую производные Фреше числовой функции $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$, вычисленные в точке $x \in H$. Коэффициенты A, B, C — непрерывные функции на H , причём при каждом $x \in H$: $A(x): H \rightarrow H$ — линейный положительно определённый самосопряженный оператор на H с конечным следом, $B(x) \in H$ — вектор, $C(x) \in \mathbb{R}$ — число. Линейный дифференциальный оператор $\Delta_A: \varphi \mapsto \Delta_A\varphi$ определяется по правилу $(\Delta_A\varphi)(x) = \text{tr}(A(x)\varphi''(x)) \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}(\Delta_A\varphi)(x) + \langle B(x), \nabla\varphi(x) \rangle + C(x)\varphi(x).$$

Заметим, что в тривиальном случае $H = \mathbb{R}^1$ получаем $(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}A(x)\varphi''(x) + B(x)\varphi'(x) + C(x)\varphi(x)$, где A, B, C, φ — числовые функции одной числовой переменной.

Предложение 1. Пусть $f(t, x)$ — решение задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = Lf(t, x), t > 0, x \in H;$$

$$f(0, x) = f_0(x), x \in H.$$

При выполнении некоторых условий регулярности существует вещественная заданная на некоторой сигма-алгебре подмножеств пространства H сигма-аддитивная мера μ и существуют функции $g_n(t, x_1, \dots, x_n)$ такие, что при любых $x_0 \in H$ и $t > 0$ имеет место формула Фейнмана:

$$f(t, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \dots \int_H \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n V(x_{j-1})\right) \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^n \langle (A^{-1}B)(x_{j-1}), x_{j-1} \rangle\right) \cdot p_A(t/n, x_0, x_1) \dots p_A(t/n, x_{n-1}, x_n) f_0(x_n) g_n(t, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \text{ где } V(x) = C(x) - \frac{1}{2} \langle (A^{-1}B)(x), B(x) \rangle \text{ для } x \in H \text{ и } p_A(t, x, y) = \exp\left(\frac{-1}{2t} \langle A^{-1}(x)(x-y), x-y \rangle\right) \text{ для } x \in H, y \in H, t > 0.$$

Явный вид меры μ и функций g_n ещё предстоит уточнить. Как и в случае $\dim H < \infty$, ключом к построению и доказательству формулы Фейнмана может стать теорема Чернова (см. [4], [5]).

Литература

1. Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. — Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), p. 377–392.
2. В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. — ДАН, том 433, № 3, Июль 2010, с. 314-317.
3. Я.А. Бутко. — Нелинейная динамика, 2006, т.2, №1, с. 75-87
4. O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev and A. Truman. — J. Math. Phys. 43 (2002) 5161–5171.
5. P. Chernoff. — Mem. Amer. Math. Soc. 140 (1974).