Секция «Математика и механика»

О метрических свойствах коэффициентов некоторых разложений в полях с неархимедовским нормированием

Сухарев Иван Юрьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ivan.suharev@gmail.com

В 1972 г. А. Оппенхайм в [1] предложил алгоритм разложения положительных действительных чисел в виде ряда. Это раложение обобщает известные разложения Энгеля, Сильвестра, Люрота, Кантора. Я. Галамбош в статье [2] изучил эргодические свойства знаменателей в разложении Оппенхайма, Ю. Ву [3], [4] исследовал некоторые метрические свойства цифр разложения Оппенхайма и его частных случаев.

В 1989 г. А и Дж. Кнопфмахеры в статье [5] предложили аналог указанного разложения в поле $\mathbb{Q}_p$. Его называют p-адическим разложением Оппенхайма. В [6] исследованы метрические свойства некоторых разложений p-адических чисел, а в [7] — метрические свойства цифр p-адического разложения Оппенхайма.

В статье [8] автором доказано, что при формальном применении алгоритма p-адического разложения Оппенхайма для элементов кольца $\mathbb{Q}_g$, где $g = p_1 \cdot \ldots \cdot p_N$, он не срабатывает с вероятностью, стремящейся к единице с ростом его шагов. Согласно теореме Малера [9], кольцо g-адических чисел изоморфно прямому произведению полей p_i-адических чисел $\prod_{i=1}^N \mathbb{Q}_{p_i}$, где p_i — различные простые делители числа g.

В статье [8] также построено обобщение указанного разложения для случая прямого произведения полей с неархимедовским нормированием и исследованы метрические свойства коэффициентов этого разложения.

Представляет интерес исследовать аналогичные свойства для более общего класса чисел. Можно построить формальное бесконечное прямое произведение полей p_i-адических чисел, где p_i — различные простые числа, $i = 1, 2, 3, \ldots$, однако, целесообразно рассматривать бесконечное прямое произведение колец целых p_i-адических чисел $\prod\limits_{p_i \text{— простые}} \mathbb{Z}_{p_i}$. В книге [10] показано, что указанное бесконечное произведение изоморфно кольцу полиадических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$. Элементы кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ имеют различные представления. Канонический вид полиадического числа x — это ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n!.$$

Есть и другое представление полиадических чисел.

Утверждение. Пусть функция $\Pi(n)$ принимает натуральные значения, причем:

1) $\Pi(1) = 1$;
2) $\mathbb{Z} \ni \frac{\Pi(n+1)}{\Pi(n)} = \gamma_n \neq 1$;
3) $\forall\, m\, \exists\, n :\ m | \Pi(n)$.

Тогда $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi = \varprojlim$
$Z/\Pi(n)\mathbb{Z}$ — проективный (или обратный) предел и любое полиадическое число $x \in \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ можно представить рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Pi(n), \tag{1}$$

который в $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ сходится к числу x. При этом коэффициенты a_n удовлетворяют неравенству

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\Pi(n+1)}{\Pi(a_n)} - 1$$

Можно построить отображение $\rho:$
$\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi \mapsto [0,1] \subset \mathbb{R}$, сохраняющее меру (меру Хаара, см. [11]) в $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$. Пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Pi(n)$. Тогда $\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Pi(n+1)}$. В силу сохранения меры отображением ρ, мера P множества $X \subset \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ равна $P(X) = \mu(\rho(X))$, где μ — мера Лебега на отрезке $[0,1]$.

Обозначим через $X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ подмножество чисел, у которых соответствующие коэффициенты $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ряда (1) фиксированы.

Теорема.

Имеет место равенство

$$P(x \in X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \frac{\Pi(i_1)}{\Pi(i_1+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pi(i_k)}{\Pi(i_k+1)}.$$

Частным случаем функции $\Pi(n)$ служит $\Pi(n) = n!$. В этом случае получается каноническое разложение полиадического числа. При построении полиадических чисел с помощью проективного предела по функции $\Pi(n)$ мы пользовались условием (см. п. 3 утверждения), что для любого числа m существует число n такое, что $m|\Pi(n)$. Если при построении в этом условии взять число m равным степеням одного простого числа p^n, мы в точности получим p-адические числа. Если среди чисел m встречаются конечное число простых чисел и все их степени, мы получим g-адические числа, где g — произведение тех самых простых.

В случае, когда множество чисел $\{m\}$ является бесконечной подпоследовательностью простых чисел и всех их степеней, мы получим некое новое кольцо чисел. Представляет интерес исследовать такие числа, различные их разложения в ряд, а также метрические свойства их коэффициентов.

Литература

1. Oppenheim, A. The representation of real numbers by infinite series of rationals // Acta arithm. 1972. 21. P.391-398.

2. Galambos, J. The ergodic properties of the denominators in the Oppenheim expansion of real numbers into infinite series of rationals // Quart. J. Math. Oxford. 1970. 2, N 21, P.177-191.

3. Wu, J. A problem of Galambos on Engel expansions // Acta arithm. 2000. 92. N 4. P.383-386.

4. Wu, J. The Oppenheim series expansions and Hausdorf dimensions // Acta arithm. 2003. 107. N 4. P.345-355

5. Knopfmacher, A. and J. Series expansions in p-adic and other non-archimedian fields // J. of Number Theory. 1989. 32. P.297-306.

6. Knopfmacher, A. and J. Metric properties of some special p-adic series expansions // Acta arithm. 1996. 76. N 1. P.11-19.

7. Wu, J. Metric properties for p-adic Oppenheim series expansions // Acta arithm. 2004. 112. N 3. P.247-261

8. Сухарев, И.Ю. Разложение Оппенхайма в кольце g-адических чисел Qg // Чебышевский сборник. 2010. 11. Вып. 1. № 33.

9. Mahler, K. Introduction to p-adic numbers and their functions // Cambridge. Cambridge University Press. 1973.

10. Новоселов, Е.В. Введение в полиадический анализ: Учебное пособие по спецкурсу // Петрозаводск. Петрозаводский государственный университет. 1982.

11. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск. 1967.

Слова благодарности

Автор приносит благодарность профессору В.Г. Чирскому за постановку задачи и внимание к работе. Автор приносит благодарность кандидату физико-математических наук Д. Трушину за помошь в некоторых алгебраических вопросах.