Секция «Математика и механика»

Совпадение экспоненциальных показателей Изобова в классах линейных систем и линейных уравнений

Ерченко Алена Анатольевна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: alenchik_e@mail.ru

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ в множестве $\mathcal{M}^n$ линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

с непрерывными ограниченными матричными функциями A выделим подмножество $\mathcal{E}^n$ систем, отвечающих линейным уравнениям

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \qquad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Функционал $\lambda\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ назовем ляпуновским, если для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любого ляпуновского преобразования $L\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ верно равенство $\lambda(A) = \lambda(LAL^{-1} + \dot{L}L^{-1})$.

Введем классы экспоненциально малых возмущений системы A:

$$\mathcal{B}_\sigma(A) = \{B \in \mathcal{M}^n \mid \overline{\lim_{t\to\infty}}\, e^{\sigma t}\|A(t) - B(t)\| < \infty\}, \quad \mathcal{B}_0(A) = \bigcup_{\sigma>0} \mathcal{B}_\sigma(A).$$

Теорема 1. Для любого ляпуновского функционала λ, любого $\sigma \geq 0$ и любой системы $A \in \mathcal{E}^n$ справедливо равенство

$$\{\lambda(B) \mid B \in \mathcal{B}_\sigma(A) \cap \mathcal{E}^n\} = \{\lambda(B) \mid B \in \mathcal{B}_\sigma(A)\}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Для любого ляпуновского функционала λ и любого $\sigma \geq 0$ справедливы равенства

$$\sup_{B \in \mathcal{B}_\sigma(A)\cap\mathcal{E}^n} \lambda(B) = \sup_{B \in \mathcal{B}_\sigma(A)} \lambda(B), \qquad \inf_{B \in \mathcal{B}_\sigma(A)\cap\mathcal{E}^n} \lambda(B) = \inf_{B \in \mathcal{B}_\sigma(A)} \lambda(B), \qquad A \in \mathcal{E}^n.$$

Теорема 2 положительно решает поставленную в докладе [2] задачу о показателях Изобова [1], а именно: если первое и второе из сформулированных в теореме 2 равенств применить к старшему λ_n и младшему λ_1 показателям Ляпунова соответственно, то правые части сформулированных равенств совпадут с верхним ∇_σ и нижним Δ_σ сигма-показателями (в случае $\sigma = 0$ –с экспоненциальными показателями) в классе $\mathcal{M}^n$ всех линейных систем, а левые – с теми же показателями, но в подклассе $\mathcal{E}^n$ линейных уравнений.

Литература

1. Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейных систем и их вычисление // Доклады АН БССР. 1982. Т.26. №1. С. 5-8.
2. Сергеев И.Н. О предельных значениях ляпуновских показателей линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. №11. С. 1664-1665.