

Секция «Математика и механика»

О неравенствах, связывающих между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Седалищев Владимир Викторович

Студент

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: vvs1988@yandex.ru

Пусть  $T$  — эндоморфизм пространства  $\Omega$  с вероятностной мерой  $\lambda$ . Для  $f \in L_2(\Omega)$  введем эргодические средние  $A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ . Эргодические теоремы фон Неймана и Биркгофа гарантируют существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f = f^*$ , первая теорема в смысле  $L_2(\Omega)$ , вторая — почти всюду в  $\Omega$ . Для измерения скорости сходимости п.в. используются  $P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\}$ . Как было показано в [3], нельзя сказать что-либо о скорости сходимости  $\|A_n f - f^*\|_2$ , зная только поведение  $P_n^\varepsilon$ ; в тоже время, в работах [2], [3] приводились оценки скоростей убывания  $P_n^\varepsilon$  при известной скорости убывания  $\|A_n f - f^*\|_2$ , но они были только в терминах “ $O$ ” и “ $o$ ”. Следующая теорема уточняет эти результаты в направлении перехода от асимптотических оценок к алгебраическим.

**Теорема.** Пусть  $g \in L_2^0(\Omega)$ , т.е.  $g \in L_2(\Omega)$  и имеет нулевое среднее, и для любого натурального  $n$  выполнено неравенство  $\|A_n g\|_2^2 \leq B n^{-\alpha}$ , где  $B$  — некоторая положительная константа,  $\alpha \in (0, 2]$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  при всех натуральных  $n \geq 2$  выполнено неравенство:

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| \geq \varepsilon \right\} < \varphi(\alpha, n) B \varepsilon^{-2},$$

причем в зависимости от  $\alpha$ :

1. Если  $\alpha \in (0, 1)$ , то  $\varphi(\alpha, n) = \frac{2^{1+\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \left( 1 + \frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2} \right) n^{-\alpha}$ .
2. Если  $\alpha = 1$ , то  $\varphi(\alpha, n) = 8 \frac{(1+\log_2 n)^2 + 3}{n}$ .
3. Если  $\alpha \in (1, 2]$ , то  $\varphi(\alpha, n) = 8 \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} \right) n^{-1}$ .

**Замечание.** Неравенство  $\|A_n g\|_2^2 \leq B n^{-\alpha}$  при  $g \in L_2^0(\Omega)$  и  $\alpha > 2$  может быть выполнено для всех натуральных  $n$  только при  $g = 0$  тождественно, поскольку в [1] было показано, что степенной скорости сходимости с показателем большим 2 в эргодической теореме фон Неймана не бывает.

Литература

1. Гапошкин В.Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. №6. С. 1366–1392.
2. Гапошкин В.Ф. Несколько примеров к задаче об  $\varepsilon$ -уклонениях для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. №2. С. 370–375.

3. Качуровский А.Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51. №4. С. 73–124.