Секция «Математика и механика»

Задача с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения

Стригун Мария Владимировна
Аспирант
Самарский государственный университет, Механико-математический факультет, Самара, Россия
E-mail: maria_strigun@mail.ru

В работе исследуется смешанная задача для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, содержащим интеграл от искомого решения.

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t)\colon 0 < x < l, 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение

$$Lu = u_{tt} - (au_x)_x + cu = f(x,t)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

граничным условием

$$u(0,t) = 0$$

и следующим нелокальным условием:

$$u(l,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l K(l,y,t,\tau)u(y,\tau)dyd\tau,$$

где функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в области $\overline{Q}_T$, $a(x,t) > 0$ $\forall (x,t) \in Q_T$ — условие гиперболичности уравнения (1), $K(x,y,t,\tau)$ задана в $\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — на отрезке $[0,l]$.

Условие (4) является нелокальным. Оно представляет собой соотношение, связывающее значение искомого решения в граничных и внутренних точках области.

В статье [1] рассматривается задача для гиперболического уравнения с нелокальным условием, содержащим интеграл лишь по пространственной переменной. Интеграл по переменной времени в нелокальном условии позволяет применить иной, чем в отмеченной работе, метод.

Теорема. Если функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x,y,t,\tau)$ удовлетворяют условиям: $a(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $c(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $K(x,y,t,\tau) \in C^2([0,l] \times [0,l] \times [0,T] \times [0,T])$, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi(l) = 0, \quad \psi(l) = \int\limits_0^l K(l,y,0,0)\varphi(y)dy,$$

то существует единственное решение $u(x,y) \in W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4).

Литература

1. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, №9, с. 1166–1179.