## Секция «Математика и механика»

### О числе решений одного уравнения с квадратами

***Куртова Лилиана Николаевна***
*Аспирант*
*Белгородский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Белгород, Россия*
*E-mail: kurtovaln@ya.ru*

В 1927 году А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа $J(n)$ решений уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n.$$

В 1931 году Т. Эстерман [3] круговым методом вывел асимптотическую формулу $J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)$, где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$. В 1979 году Д. И. Исмоилов [1], развивая метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [2], использую оценку суммы сумм Клосермана, довели остаток до $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

Рассмотрим задачу, родственную проблеме делителей Ингама. Пусть

$$I(n,h) = \sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}}.$$

Основной результат изложен в теореме.

**Теорема**. Пусть $\varepsilon$ – произвольное положительное число, $n \in \mathbb{N}$, $h$ – натуральное число, такое, что $h \equiv 0 \pmod 4$, $h \le n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула

$$I(n,h) = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0,\\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G^2(q,l,0) G^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}),$$

где $G(q,l,0) = \sum\limits_{s=1}^{q} \exp(2\pi i \frac{ls^2}{q})$ – сумма Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценок для суммы сумм Клостермана.

### Литература

1. Исмоилов Д. И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН ТаджССР, 1979, 22(2), с. 75-79.
2. Deshouillers, J.-M., Iwaniec, H. An additive divisor problem. // J. London Math. Soc., 1982, 26(2), p. 1-14.
3. Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math., 1931, 164, p. 173-182.