

Секция «Математика и механика»

Предельное поведение множества Максвелла в задаче о качении сферы по плоскости и конструктивная задача управления нелинейными пятимерными системами

Маштаков Алексей Павлович

Аспирант

ИПС РАН, Факультет прикладной математики, Переславль-Залесский, Россия

E-mail: masht1@mail.ru

Рассматривается задача об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной точки плоскости в другую по кратчайшей кривой, так чтобы ориентация сферы на концах совпадала с заданной. Для задания ориентации сферы в пространстве используется кватернион единичной нормы. Соответствующая задача оптимального управления имеет вид [1,2]:

$$dx / dt = u_1, \quad dy / dt = u_2,$$

$$dq_0 / dt = \frac{1}{2}(q_2 u_1 - q_1 u_2),$$

$$dq_1 / dt = \frac{1}{2}(q_3 u_1 + q_0 u_2),$$

$$dq_2 / dt = \frac{1}{2}(-q_0 u_1 + q_3 u_2),$$

$$dq_3 / dt = \frac{1}{2}(-q_1 u_1 - q_2 u_2),$$

$$Q = (x, y, q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbf{R}^2 \times S^3,$$

$$u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$Q(0) = Q_0, \quad Q(t_1) = Q_1,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Получена асимптотика экстремальных траекторий для качения сферы вдоль синусоид малой амплитуды. Исследована асимптотика уравнения, задающего множество Максвелла $q_3 = 0$. Получены двусторонние оценки первого положительного корня соответствующего уравнения, определены участки его монотонной зависимости от параметра. Описано предельное поведение множества Максвелла. Получены оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

Кроме того, рассматривается конструктивная задача управления нелинейными пятимерными системами вида $\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q)$ [3]. В частности, такой вид имеет

управляемая система в задаче о качении сферы по плоскости. Для решения задачи используется нильпотентная аппроксимация. Предлагается итеративный алгоритм поиска приближенного управления, переводящего исходную нелинейную систему из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние, основанный на точном решении задачи управления для нильпотентной канонической пятимерной системы.

Литература

1. А.П. Маштаков. Асимптотика экстремальных кривых в задаче о качении шара по плоскости // Современная математика. Фундаментальные направления (принята к публикации).
2. А.П. Маштаков, Ю.Л. Сачков. Экстремальные траектории и точки Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // Мат. сборник(принята к публикации).
3. Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов, А. П. Маштаков. Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации. Программные системы: теория и приложения // Труды международной конференции „Программные системы: теория и приложения“, ИПС РАН, г. Переславль-Залесский, май 2009 / В двух томах. – изд. „Университет города Переславля“, 2009, т. 2, с. 5-23

Слова благодарности

Научному руководителю Сачкову Ю.Л.