Секция «Математика и механика»

Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов

Горчакова Екатерина Витальевна

Аспирант

Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова, Факультет информатики и вычислительной техники, Ярославль, Россия

E-mail: gorchakovaev@yandex.ru

1. Постановка задачи. Рассматривается система, представляющая собой математическую модель взаимодействия двух близких слабо связанных видов

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r[1 + \varepsilon a(1 - x_2) - x_1(t-1)]x_1, \\ \dot{x}_2 &= r[1 + \varepsilon a(1 - x_1) - x_2(t-1)]x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ — нормированные плотности популяций, $r > 0$ — коэффициент линейного роста, $0 < \varepsilon \ll 1$, параметр a регулирует интенсивность взаимодействия видов, при $a > 0$ виды конкурируют, при $a < 0$ — сосуществуют в симбиозе.

2. Построение нормальной формы. Изучение окрестности состояния равновесия $(1, 1)$ системы (1) проводится методом нормальных форм. Пусть $r = \pi/2 + \varepsilon$, тогда характеристический квазимногочлен линейной системы при $\varepsilon = 0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\pi/2$. Для построения нормальной формы в системе (1) выполняется замена вида $x_j(t) = 1 + \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j\ 1}(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_{j\ 2}(t,\tau) + \dots$, где $j = 1, 2$, $z_j(\tau) = \rho_j(\tau)e^{i\varphi_j(\tau)}$ — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$. В результате нормальная форма получается в следующем виде

$$\begin{aligned} \xi_1' &= (1 - d\cos\delta - \xi_1^2)\xi_1 + d\xi_2\cos(\alpha + \delta), \\ \xi_2' &= (1 - d\cos\delta - \xi_2^2)\xi_2 + d\xi_1\cos(\alpha - \delta), \\ \alpha' &= b_0(\xi_1^2 - \xi_2^2) - d\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha + \delta) - d\tfrac{\xi_1}{\xi_2}\sin(\alpha - \delta), \end{aligned} \tag{2}$$

где d и δ определяются функцией связи, b_0 — правыми частями системы (1), переменные $\xi_j = \rho_j\sqrt{\frac{3\pi-2}{10(1-a)}}$, — медленно меняющиеся амплитуды колебаний, $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ — их разность фаз, штрихом обозначена производная по новому времени $s = \frac{\pi^2+4}{2\pi(1-a)}\tau$.

3. Исследование нормальной формы. В случае симбиоза видов $a < 0$, параметр d положителен, система (2) полностью соответствует системе, полученной в работе [1], где проведен анализ ее качественного поведения, получены бифуркационные значения d и описаны фазовые перестройки при изменении d. При положительных a параметр $d < 0$, система (2) заменами сводится к системе аналогичного вида.

На основе полученных в [1] сценариев фазовых перестроек можно сделать ряд биологических выводов. Для случая симбиоза видов: при достаточно сильной связи между видами (d большое) колебания их численности синхронизируются, если d достаточно мало, реализуются колебания в противофазе. В случае конкуренции ситуация противоположная. В относительно узкой области изменения d имеются устойчивые периодические решения системы (2), которым соответствуют двухчастотные колебания сходной системы. Последний колебательный режим, вероятно, наиболее осмыслен с биологической точки зрения, так как средняя численность совокупности популяций в этом случае выше, чем во всех остальных.