

Секция «Математика и механика»

Асимптотическая оценка количества целых точек в восьмилепестковой розе

Дементьев Владимир Михайлович

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: dementiev.vm@gmail.com

В теории целых точек существует две классические задачи: проблема Гаусса о числе целых точек в круге и проблема делителей Дирихле о числе целых точек од гиперболой.

Рассмотрим круг  $x^2 + y^2 \leq R$  и обозначим через  $K(R)$  число целых точек в этом круге. При больших  $R$  величина  $K(R)$  близка к площади круга  $\pi R$ . Обозначим через  $\Delta(R)$  разность между  $K(R)$  и  $\pi R$ ,  $\Delta(R) = K(R) - \pi R$ . Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины  $|\Delta(R)|$  получить возможно более точную оценку сверху при  $R \rightarrow +\infty$ . Наиболее известный результат оценки  $|\Delta(R)|$  таков:

$$K(R) = \pi R + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{264}} \ln R\right),$$

где  $K(R)$  — количество целых точек в круге  $x^2 + y^2 \leq R$ .

Аналогично формулируется проблема делителей Дирихле. Рассмотрим гиперболу  $xy = R$  и число  $L(R)$  целых точек с положительными координатами под ней.

Наиболее известный результат по этой проблеме таков:

$$L(R) = R(\ln R + 2\gamma - 1) + O\left(R^{\frac{1}{3} - \frac{1}{246}} \ln^2 R\right).$$

Рассмотрим восьмилепестковую розу

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \sin 4\phi \\ y = a \sin \phi \sin 4\phi, \end{cases}$$

В данной работе доказана следующая асимптотическая формула:

$$K(a) = \pi a^2/2 + O(a^{\frac{2}{3}} \ln a).$$

Для решения задачи применяется метод тригонометрических сумм, в частности, теорема Корпута об оценке тригонометрической суммы по  $k$ -й производной.

Литература

1. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел. 9-е изд. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.