Секция «Математика и механика»

Предельное распределение нормированного времени жизни частицы при случайном блуждании

Шихова Н.И.[1]***, Муромская А.А.***[2]

1 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Щербинка, Россия

E-mail: shih-shih@mail.ru

Рассматривается случайное блуждание с дискретным временем, в котором частица может сдвинуться вверх с вероятностью p, вниз — с вероятностью q и прямо с вероятностью r. При этом на высоте 0 имеется поглощающий экран, то есть если частица попадает на высоту0, то она поглощается и блуждание останавливается; кроме того, на высоте n ($n \in \mathbb{N}$) имеется отражающий экран, то есть из положения $n-1$ частица не может двинуться вверх. Пусть $\tau(x)$ — момент остановки, а $m(x) = \mathsf{E}\tau(x)$ — его математическое ожидание. Для него верно соотношение

$$m(x) = pm(x+1) + qm(x-1) + rm(x) + 1$$

с граничными условиями $m(0) = 0;\ m(1) = \frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q^{n-1}(q-p)}$ для $p \neq q$ и $m(0) = 0;\ m(1) = \frac{n-1}{p}$ для $p = q$. Тогда получаем, что справедлива следующая

Лемма.

$$m(x) = \frac{p^{n-x}(p^x - q^x)}{q^{n-1}(p-q)^2} + \frac{x}{q-p} \text{ при } p \neq q;$$

$$m(x) = \frac{x}{2p}(2n - x - 1)\text{при } p = q.$$

Далее рассматривается производящая функция моментов $\varphi(z,x) = \mathsf{E}z^{\tau(x)}$. Для нее получено рекуррентное соотношение

$$\varphi(z,x) = z(p\varphi(z,x+1) + q\varphi(z,x-1) + r\varphi(z,x))$$

с граничными условиями $\varphi(z,0) = 1;\ \varphi(z,n-1) = \frac{qz}{1-pz-rz}\varphi(z,n-2)$. Тогда

$$\varphi(z,x) = c_1(z)\lambda_1^x(z) + c_2(z)\lambda_2^x(z), \text{ где}$$

$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{1 - rz \pm \sqrt{(rz-1)^2 - 4pqz^2}}{2pz},$$

$$c_1(z) = \frac{qz\lambda_2^{n-2}(z) + (1-pz-rz)\lambda_2^{n-1}((z)}{(1-pz-rz)(\lambda_1^{n-1}(z) - \lambda_2^{n-1}(z)) - qz(\lambda_1^{n-2}(z) - \lambda_2^{n-2}(z))} \text{ и}$$

$$c_2(z) = \frac{(1-pz-rz)\lambda_1^{n-1}((z) - qz\lambda_1^{n-2}(z)}{(1-pz-rz)(\lambda_1^{n-1}(z) - \lambda_2^{n-1}(z)) - qz(\lambda_1^{n-2}(z) - \lambda_2^{n-2}(z))}.$$

После этого получено предельное распределение для $\frac{\tau(x)}{m(x)}$ в зависимости от x.