Секция «Математика и механика»

О сходимости производных орторекурсивных кусочно-линейных приближений

Подкопаев Антон Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: tony-meshok@yandex.ru

Рекурсивным разложением $f \in X$ (X — банахово пространство) по последовательности $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ непрерывных линейных операторов в X называется ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j R_{j-1} f$, где $R_0 = \mathrm{Id}$, $Q_j = \mathrm{Id} - P_j$, $R_j = Q_j Q_{j-1} \dots Q_1$ ($j \in \mathbb{N}$). Если X гильбертово и P_j — ортопроекторы, то это разложение называется *орторекурсивным*.

Рассмотрим аффинные системы функций $\varphi_{j,k}^{(d)}(x) = 2^{jd/2} \varphi^{(d)}(2^j x - k)$ ($d \in \{1, 2\}$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{Z}^d$), где $\varphi^{(1)}(x) = \sqrt{3/2} \max(0, 1 - |x|)$, $\varphi^{(2)}(x) = \sqrt{2} \max(0, \min(1 - |x_1|, 1 - |x_2|, 1 - |x_1 + x_2|))$, и операторы

$$Q_{j,k}^{(d)} g = g - \varphi_{j,k}^{(d)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) \varphi_{j,k}^{(d)}(y) dy.$$

Представляет интерес рекурсивное разложение финитной функции f на $\mathbb{R}^d$ по (зависящей от f) последовательности

$$P_j^{(d)} = \mathrm{Id} - \prod_{k: \mu\left(\operatorname{supp} \varphi_{j,k}^{(d)} \cap \operatorname{supp} R_{j-1} f\right) > 0} Q_{j,k}^{(d)},$$

где порядок сомножителей соответствует лексикографическому порядку индексов k (слева направо и (при $d = 2$) снизу вверх). Оно сводится к орторекурсивному в $L_2(\mathbb{R}^d)$, при $d = 1$ оно похоже на пример неортогонального разложения из [1]. Сходимость подобных разложений в $L_2([0, 1])$ к разлагаемой функции f установлена для аффинных систем более общего вида в [2]. Следующее утверждение касается сходимости в более сильных соболевских нормах.

Теорема. *Указанное рекурсивное разложение финитной функции f сходится к f в $W_p^1(\mathbb{R}^d)$ ($p \in [1, \infty)$), если $f \in W_p^1(\mathbb{R}^d)$, и в $W_\infty^1(\mathbb{R}^d)$, если $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$.*

Литература

1. Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера—Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов, 2000. С. 168.

2. Политов А.В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика. 2010. No. 3. С. 3–7.

Слова благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321) и программы "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-3252.2010.1).