

Секция «Математика и механика»

Задача о равновесии моментно-упругого прямоугольника

Слепцов Иннокентий Степанович

Студент

СВФУ - Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,

Физико-технический институт, Якутск, Россия

E-mail: k.sleptsov@mail.ru

В моментной (микрополярной) теории упругости, известны немного работ с точными аналитическими решениями задач, особенно в случае областей с конечными размерами. В данной работе развивается метод аналитического решения задач о равновесии моментно-упругого прямоугольника.

Рассматриваем случай плоской деформации в моментной теории упругости [1], когда перемещение \mathbf{u} и вращение ω имеют вид:

$$\mathbf{u} = u_x(x, y)\mathbf{i} + u_y(x, y)\mathbf{j}$$

$$\omega = \omega(x, y)\mathbf{k},$$

Искомая задача о равновесии моментно-упругого прямоугольника имеет вид:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \omega = 0, \mathbf{r}\epsilon(0 < x < a, 0 < y < b), \\ (v + \beta)\Delta\omega + 2\alpha\nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha\omega = 0, \\ \sigma_{xy}|_{x=a,0} = \tilde{\sigma}_{x\pm}(y), u_x|_{x=a,0} = \tilde{u}_{x\pm}(x), \omega|_{x=a,0} = \tilde{\omega}_{x\pm}(y), \\ \sigma_{yx}|_{y=b,0} = \tilde{\sigma}_{y\pm}(x), u_y|_{y=b,0} = \tilde{u}_{y\pm}(y), \omega|_{y=b,0} = \tilde{\omega}_{y\pm}(x), \end{cases}$$

здесь $\lambda, \alpha, \mu, \beta$ - упругие постоянные. Краевые условия означают, что на границе области заданы нормальные компоненты напряжений, касательные компоненты вектора перемещения и моментные напряжения. Предлагаемый метод решения состоит в том, что рассматриваемая задача, при достаточной гладкости и согласованности краевых функций, сводится к последовательному решению краевых задач для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца [2-4].

В частном случае поставленной задачи, когда

$$u_x|_{x=0} = \tilde{u}_{x-} = \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right),$$

а все остальные краевые функции равны нулю, все выкладки проведены до конца и получено решение в замкнутой форме. Компоненты векторов вращения и перемещений имеют следующий вид:

$$\omega = \frac{\pi}{\mu b} \left[\frac{Sh\frac{2\pi}{b}(a-x)}{Sh\frac{2\pi}{b}a} - \frac{Sh\theta(a-x)}{Sh\theta a} \right] \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$
$$u_x = \left\{ \left\{ 1 - \frac{\pi^2 B(\alpha + \mu)}{b\mu^2} - \left[\frac{2\pi\mu(\lambda + \mu - \alpha)}{b(\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu)} + \frac{\alpha}{\mu b} \right] aCh\left(\frac{2\pi}{b}a\right) \right\} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{Sh \frac{2\pi}{b}(a-x)}{Sh \frac{2\pi}{b}a} + \frac{\pi^2 B(\alpha + \mu) Sh \theta(a-x)}{b\mu^2 Sh \theta a} + \\
 & + \left[\frac{2\pi\mu(\lambda + \mu - \alpha)}{b(\mu + \alpha)(\lambda + 2\mu)} + \frac{\alpha}{\mu b} \right] \frac{(a-x)Ch \left(\frac{2\pi}{b}(a-x) \right)}{Sh \left(\frac{2\pi}{b}a \right)} \cos \left(\frac{2\pi}{b}y \right) \\
 u_y = & \left\{ \left[\frac{\alpha - \mu}{\alpha + \mu} - \frac{\theta^2 B(\alpha + \mu)}{4\mu^2} - \left[\frac{\alpha}{\mu b} - \frac{2\mu(\lambda + \mu - \alpha)}{(\alpha + \mu)(\lambda + 2\mu)} \right] \right] \left[\frac{b}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \pi a Ch \left(\frac{2\pi}{b}a \right) \right] \right\} \frac{Ch \left[\frac{2\pi}{b}(a-x) \right]}{Sh \left(\frac{2\pi}{b}a \right)} + \frac{\pi \theta B(\alpha + \mu) Sh \theta(a-x)}{2b\mu^2 b Sh \theta a} + \\
 & + \pi \left[\frac{\alpha}{\mu b} - \frac{2\mu(\lambda + \mu - \alpha)}{(\alpha + \mu)(\lambda + 2\mu)} \right] \frac{(a-x)Sh \left(\frac{2\pi}{b}(a-x) \right)}{Sh \left(\frac{2\pi}{b}a \right)} \sin \left(\frac{2\pi}{b}y \right)
 \end{aligned}$$

Компоненты напряжений вычисляются по закону Гука [1].

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 367 с.
2. Григорьев Ю.М. Аналитическое решение задачи о равновесии прямоугольника в моментной теории упругости // Вестник ЯГУ. – 2007. – Т.4.- № 4. – С. 19-26.
3. Григорьев Ю.М. Аналитическое решение некоторых основных задач классической и моментной теорий упругости для прямоугольного параллелепипеда // Моделирование в механике.-Т.6(23).- №4.- Новосиб-к, 1992.- С. 21-26.
4. Хомасуридзе Н.Г. О решении трехмерных граничных задач безмоментной и моментной теорий упругости / Исследование некоторых уравнений математической физики. – 1972. – Вып. 1. – С. 123-147. (Тбилиси: Изд. Тбил. гос. ун-та).

Слова благодарности

Хочу поблагодарить своего научного руководителя д.ф.-м.н. Григорьева Юрия Михайловича за помощь в первых шагах в науке, и за знания, которым он меня обучил.

Иллюстрации

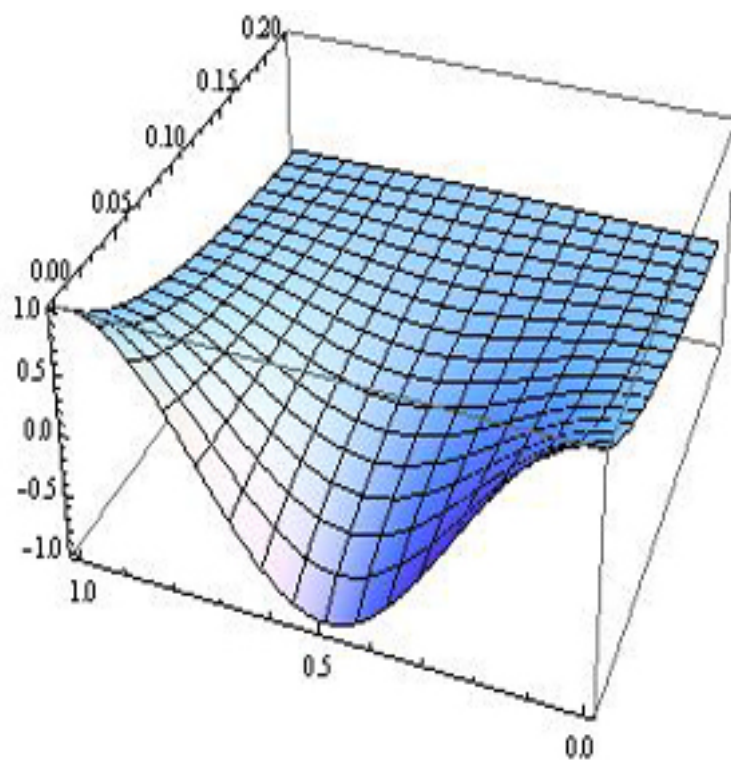


Рис. 1: Компонента перемещения u_x

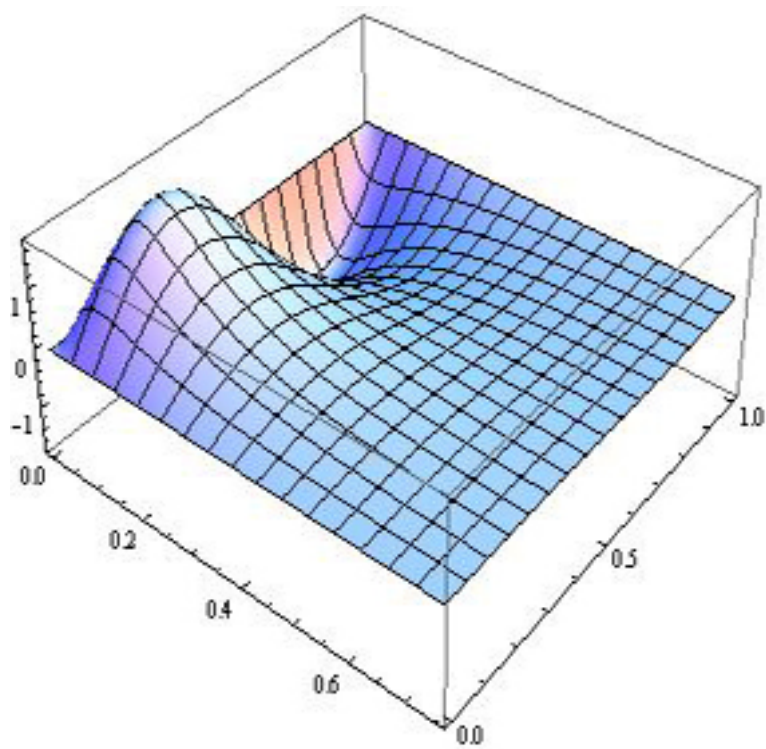


Рис. 2: Компонента вращения

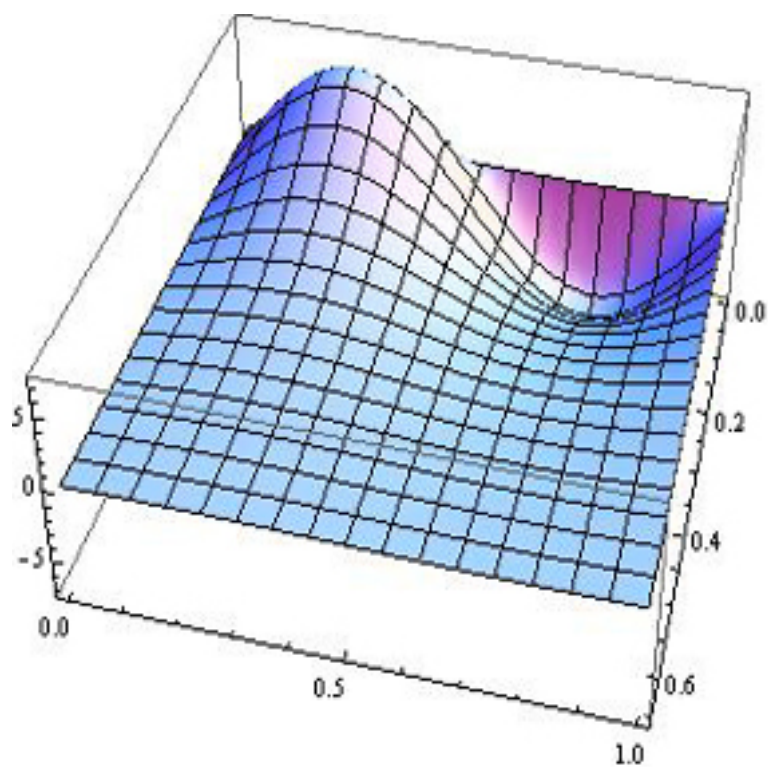


Рис. 3: График разности компонент напряжений