

Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Теорема о неявной функции на выпуклом множестве в окрестности
анормальной точки

Жуковский С.Е.¹, Мингалеева З.Т.²

1 - Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических
и естественных наук, 2 - Московский государственный университет имени М.В.
Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва,
Россия

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Пусть заданы банаховы пространства X, Y , топологическое пространство Σ , выпук-
лое замкнутое множество $U \subset X$, отображение $F : X \times \Sigma \rightarrow Y$ и точки $x_* \in U, \sigma_* \in \Sigma$,
для которых $F(x_*, \sigma_*) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \quad x \in U, \quad (1)$$

в котором x – неизвестное, а σ – параметр. Вопрос о существовании неявной функции в
задаче (1) в случае, когда условие Робинсона не выполняется, изучен А.В. Арутюновым
в работах [1–3] в предположении, что U является замкнутым выпуклым конусом. Здесь
мы приводим обобщение этого результата на случай, когда U – замкнутое выпуклое
множество.

Пусть $G : X \rightarrow Y$ – заданное дважды дифференцируемое в точке x_* отображение,
 $G(x_*) = 0$. Положим $\mathcal{U} = \text{cone}(U - \{x_*\})$.

Определение. Пусть существует

$$h \in \mathcal{U} : h \in \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*), \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, h] \in \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U}.$$

Отображение G назовем 2-регулярным в точке x_* относительно множества U по на-
правлению h , если имеет место

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_*)\mathcal{U} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_*)[h, \mathcal{U} \cap \ker \frac{\partial G}{\partial x}(x_*)] = Y.$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования неявной функции в
задаче (1). Предположим, что F дважды непрерывно дифференцируемо по x равно-
мерно по σ в некоторой окрестности точки (x_*, σ_*) . При каждом σ , достаточно близком
к σ_* , отображение $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, не завися-
щей от σ . Отображения $F(x_*, \cdot), \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \cdot), \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \cdot)$ непрерывны в окрестности точке
 σ_* . Обозначим

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\mathcal{U}.$$

Предположим, что линейная оболочка $\text{span } V$ конуса V замкнута, и это подпростран-
ство топологически дополняемо. Через π будем обозначать некоторый линейный непре-
рывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее
 $\text{span } V$. Через $B_X(x, r)$ далее будем обозначать шар с центром в точке x радиуса r .

Теорема. Пусть относительная внутренность $\text{ri}V$ непуста, и отображение $F(\cdot, \sigma_*)$ 2-регулярно в точке x_* относительно U по некоторому направлению $h \in X$. Тогда для произвольного вектора $l \in \text{ri}V$ существуют такие окрестность O точки σ_* , числа $c \geq 0$, $\delta > 0$ и непрерывное отображение $x(\cdot) : O \rightarrow U$, что $F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0$,

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq c(\Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \Delta_3(\sigma) + \Delta_4(\sigma)) \quad \forall \sigma \in O.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1(\sigma) &= \sup \left\{ \left\| \pi \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x \right\| : x \in \text{span}(U - \{x_*\}), \|x\| \leq 1 \right\}, \\ \Delta_2(\sigma) &= \sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x \right\| : x \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma) \cap \mathcal{U}, \|x\| \leq 1 \right\}, \\ \Delta_3(\sigma) &= \|F(x_*, \sigma)\|, \quad \Delta_4(\sigma) = \rho(-F(x_*, \sigma), V_\delta)^{1/2}, \end{aligned}$$

ρ — расстояние от точки до множества, $V_\delta = \text{cone}(B_Y(l, \delta)) \cap \text{span} V$.

Литература

1. Арутюнов А.В. К теоремам о неявной функции в аномальных точках // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2010. Т. 16. No 1. С. 30-39.
2. Арутюнов А.В. Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности аномальной точки // Матем. заметки. 2005. Т. 77. No 4. С. 483-497.
3. Арутюнов А.В. Теорема о неявной функции на конусе в окрестности аномальной точки // Матем. заметки. 2005. Т. 78. No 4. С. 619-621.

Слова благодарности

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю профессору Араму Владимировичу Арутюнову за постоянное внимание к работе.