Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае трехмерной области

Нефедов Павел Владимирович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: p_nefedov@mail.ru

Данная работа является продолжением работ Е.И.Моисеева, посвященных исследованию задач смешанного типа в случае трехмерных областей. Основной целью работы является отыскание классического решения и изучение вопроса о его единственности. Рассмотрим следующую задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерной области D:

$$L[u] = u_{xx} + sgn\, y \cdot u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

где $D = D^{(+)} \cup D^{(-)}$ и

$$D^{(+)} = \left\{(x, y, z) : y > 0, -1 < x < 1, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \pi\right\},$$

$$D^{(-)} = \left\{(x, y, z) : -1/2 < y < 0, -y < x < y + 1, 0 < z < \pi\right\}.$$

Будем предполагать, что решение $u \in C(\overline{D^{(+)} \cup D^{(-)}}) \cap C^2(D^{(+)}) \cap C^2(D^{(-)})$ и на границах области D выполнены следующие краевые условия:

$$u|_{r=1} = \psi(\varphi, z), \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le z \le \pi,$$

$$u|_{x=-r, y=0} = 0, \quad r \le 1, \quad 0 \le z \le \pi,$$
$$u|_{x=-y} = 0, \quad 0 \le x \le 1/2, \quad 0 \le z \le \pi,$$
$$u|_{z=0} = 0, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad y \ge 0,$$
$$u|_{z=0} = 0, \quad -y \le x \le y + 1, \quad -1/2 \le y \le 0,$$
$$u|_{z=\pi} = 0, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad y \ge 0,$$
$$u|_{z=\pi} = 0, \quad -y \le x \le y + 1, \quad -1/2 \le y \le 0.$$

Используя метод разделения переменных, получим следующее решение поставленной задачи:

$$\begin{cases} u(r, \varphi, z) = \sum\limits_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \sin kz \cdot \sin\left((n - 1/4)(\varphi - \pi)\right) \cdot \frac{I_{n-1/4}(kr)}{I_{n-1/4}(k)}, \quad (r, \varphi, z) \in D^{(+)}, \\ u(x, y, z) = \sum\limits_{n,k=1}^{\infty} \sigma_{nk} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \sin kz \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n-1/4}{2}} \cdot \frac{I_{n-1/4}(k\sqrt{x^2-y^2})}{I_{n-1/4}(k)}, \quad (x, y, z) \in D^{(-)}, \end{cases}$$

где под $I_\nu = I_\nu(z)$ понимается модифицированная функция Бесселя первого рода [3]. Далее необходимо показать, что полученное решение является классическим [1] и имеет место теорема единственности [2]. В этой связи доказывается

Теорема 1. Классическое решение поставленной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе существует и может быть представлено в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда.

Вопрос о единственности полученного решения разрешается следующей теоремой.

Теорема 2. Классическое решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе является единственным.

Литература

1. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, 1, Стр. 177-179.

2. Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1987. Т. 242, 1, Стр. 48-51.

3. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Изд-во «Наука», 1990, 528 с.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность академику РАН Е.И.Моисееву за научное руководство, постановку и обсуждение задачи. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-12081-офи-м-2011 и 11-01-00164-а) и гранта МК-7128.2012.9.