Секция «Математика и механика»

О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях.

Шнурников Игорь Николаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: shnurnikov@yandex.ru

Пусть замкнутое связное двумерное риманово многообразие M^2 имеет постоянную гауссову кривизну и набор Γ состоит из n различных замкнутых геодезических на M^2. Обозначим через $f(\Gamma)$ число компонент связности дополнения в многообразии M^2 к объединению геодезических из набора Γ. Как устроено множество $F(M^2, n)$ всех возможных чисел $f(\Gamma)$ для фиксированных многообразия M^2 и числа геодезических n? Впервые этот вопрос поставил Б. Грюнбаум [1] для прямых на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Н. Мартинов [2] полностью нашел множество $F(\mathbb{RP}^2, n)$, которое содержит почти все целые числа отрезка $\left(n; 1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)$ при $n \to \infty$. При $n \geq 3$ оставшиеся числа представляют собой объединение $\left[\sqrt{2n - 5\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right]$ лакун, причем лакуна номер i состоит из $n - \frac{i^2+i}{2} - 2$ целых чисел.

В отличие от проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, для тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками множества $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ являются бесконечными множествами, содержащими одну лакуну при $n \geq 6$ и $n \geq 7$ соответственно.

Теорема. *Для тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками верно $F(T^2, 1) = \{1\}$ и $F(KL^2, 1) = \mathbb{N}$. Множества $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ при $n \geq 2$ имеют следующий вид:*

$$F(T^2, n) = \{n-1, n\} \bigcup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geqslant 2n-4\}, \qquad F(KL^2, n) = F(T^2, n) \bigcup \{n+1\}.$$

Тетраэдр в трехмерном евклидовом пространстве называется *равногранным*, если все его грани суть равные треугольники (любые остроугольные треугольники). Среди всех трехмерных многогранников поверхность равногранных тетраэдров и только их содержит бесконечное число неизоморфных (позвенно непараллельных) замкнутых несамопересекающихся геодезических [3]. Замкнутые геодезические на равногранных тетраэдрах были классифицированы в [4].

Теорема. *Для произвольного равногранного тетраэдра и набора из n замкнутых геодезических на нем множество всех возможных чисел областей f имеет вид*

$$\{n+1, 2n\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4n-6\}$$

при $n \geq 3$. Для $n = 1$ и $n = 2$ соответствующие множества — $\{1\}$ и $\{3, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.

Литература

1. Grunbaum B. Arrangements and spreads. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.

2. Martinov N. Classification of arrangements by the number of their cells// Discrete and Comput. Geometry, 1993. V. 9, iss. 1. pp. 39–46.

3. Протасов В.Ю. О числе замкнутых геодезических на многограннике // УМН, т.63, вып. 5, 2008, 197–198

4. Протасов В.Ю. Замкнутые геодезические на поверхности симплекса // Матем. сб. 198:2, 2007, 103–120.

Слова благодарности

Благодарен научному руководителю А.Т. Фоменко за постановку задачи и В.Ю. Протасову за ценные обсуждения.