Секция «Математика и механика»

Классификация рациональных гамильтонианов в симплектических пространствах

Бибиков Павел Витальевич
Аспирант
Институт проблем управления им. Трапезникова РАН, лаборатория 6, Москва, Россия
E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Пусть $\mathbb{C}^{2n}$ — симплектическое пространство с координатами (q,p) и симплектической структурой Ω. Рассмотрим следующее действие группы $G := \mathrm{Sp}(2n) \times (\mathrm{Trans} \times \mathrm{T})$ на пространстве гамильтонианов, рационально зависящих от координат q и p: симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n)$ действует симплектическими заменами координат, подгруппа $\mathrm{Trans} \simeq \mathbb{C}^{2n}$ действует параллельными переносами на пространстве $\mathbb{C}^{2n}$, а подгруппа $\mathrm{T} \simeq \mathbb{C}$ действует сдвигами функций: $H \mapsto H + c$, где $c \in \mathrm{T}$.

Целью данной работы является классификация G-орбит рациональных гамильтонианов на симплектическом $2n$-мерном пространстве. Отметим, что случай $n = 1$ был решен в [1].

Для решения проблемы классификации гамильтонианов мы применим метод, изложенный в [2]. Рассмотрим стандартную связность Γ на пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ и модуль Σ симметрических функций на пространстве кокасательного расслоения к $\mathbb{C}^{2n}$. Определим симметрический дифференциал $d^s_\Gamma := \mathrm{Sym} \circ d_\Gamma \colon \Sigma \to \Sigma$ по этой связности и его поднятие $\widehat{d^s_\Gamma}$ в пространства джетов (все необходимые определения, связанные с пространствами джетов, см. в [3]).

Предложение. *Горизонтальные k-формы $Q_1 := \widehat{du}$, $Q_k := \widehat{d^s_\Gamma} Q_{k-1}$ (где $k \geqslant 2$) на пространствах k-джетов являются G-инвариантными.*

С помощью этих k-форм и симплектической структуры Ω построим инвариантные дифференцирования и дифференциальные инварианты. Для этого с помощью Ω превратим 1-форму Q_1 в вектор ∇_1 (являющийся инвариантным дифференцированием) и 2-форму Q_2 в линейный оператор $\mathcal{D}$ (являющийся G-инвариантным). Пусть $\nabla_i := \mathcal{D}^{i-1}\nabla_1$ (где $i = 2, \ldots, 2n$) и $K_{ij} := Q_2(\nabla_i, \nabla_j)$ (где $i \leqslant j$) — коэффициенты квадрики Q_2 в «инвариантном базисе» $\{\nabla_1^*, \ldots, \nabla_{2n}^*\}$.

Замечание. Под дифференциальным инвариантом мы понимаем G-инвариантную рациональную функцию на пространстве джетов.

Теорема 1. *Поле дифференциальных инвариантов действия группы G на пространстве гамильтонианов порождается дифференциальными инвариантами K_{ij} порядка 2 и инвариантными дифференцированиями $\nabla_1, \ldots, \nabla_{2n}$.*

Из этой теоремы получается описание G-орбит рациональных гамильтонианов. Для этого рассмотрим дифференциальные инварианты K_{ij}, $\nabla_l(K_{ij})$ порядка 3 и их ограничения на заданный гамильтониан H. Эти ограничения являются рациональными функциями от $2n$ переменных (q,p). Обозначим через $\mathcal{S}_H$ множество алгебраических зависимостей между этими функциями.

Теорема 2. *Рациональные гамильтонианы H и $\widetilde{H}$ являются G-эквивалентными если и только если $\mathcal{S}_H = \mathcal{S}_{\widetilde{H}}$.*

Литература

1. Bibikov P.V. *On affine classification of functions and foliations on the plane* // Lobahevskii Journal of Mathematics. 2012. Vol. 33. No. 2, to appear.
2. Бибиков П.В., Лычагин В.В. *Классификация линейных действий алгебраических групп на пространствах однородных форм* // ДАН. 2012. Т. 442. Вып. 6, 732–735.
3. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии.* Москва, ВИНИТИ, т.28, 1988.

Слова благодарности

Автор благодарит В.В. Лычагина за внимание к работе и ценные замечания.