Секция «Математика и механика»

Две теоремы о конгруэнциях цепей

Карманова Евгения Олеговна
Аспирант
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Факультет компьютерных наук и информационных технологий, Саратов, Россия
E-mail: janekao@mail.ru

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а α — отношение на V.Множество V называется множеством вершин, отношение α — отношением смежности, а пары, входящие в α, дугами орграфа G. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Факторграфом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что факторграф G/θ является K-графом.

Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V.

Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Теорема 1. Количество конгруэнций m-реберной цепи равно $B(m)$, где $B(m)$ – число Белла (количество разбиений m-элементного множества).

В [2] обсуждалась следующая задача: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, факторграфом которой является данный связный граф.

Теорема 2. Пусть G – связный граф. Тогда $p(G) = m + l - k$, где m –количество ребер графа G, l – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа G, k – максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Литература

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука. Физматлит, 1997.

2. Карманова Е.О. О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. – 2011. – 2 (12). – С.96-100. ISSN 2071-0410.