

Секция «Математика и механика»

О сложности реализации линейной булевой функции в некотором базисе

Комбаров Юрий Анатольевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Одними из наиболее изученных с точки зрения их минимальных реализаций являются линейные булевы функции, представляемые в виде  $l_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  или в виде  $\bar{l}_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ , где  $c = \{0, 1\}$ , а " $\oplus$ " означает сложение по модулю два [1]. Первый результат в этом направлении был получен в 1952 г. Кадро [2]: для реализации линейной булевой функции (существенно зависящей) от  $n$  переменных контактной схемой необходимо и достаточно  $4n - 4$  контактов. Сложность реализации линейных функций схемами из функциональных элементов [3] (определяемая, как правило, как наименьшее возможное число функциональных элементов, достаточное для реализации функции  $f$  схемой в заданном базисе и обозначаемая как  $L(f)$ ) известна для многих базисов, состоящих из не более, чем двухвходовых функциональных элементов. Так, в работе [4] показано, что  $L(l_n) = L(\bar{l}_n) = 4n - 4$  в базисе  $\{x \wedge y, x \vee y, \bar{x}\}$  и  $L(l_n) = L(\bar{l}_n) = 7n - 7$  в базисах  $\{x \wedge y, \bar{x}\}$  и  $\{x \vee y, \bar{x}\}$ , а в работе [5] показано, что  $L(l_n) = L(\bar{l}_n) = 3n - 3$  в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x} \wedge y\}$ . Для некоторых базисов известны очень точные оценки для сложности реализации линейных функций, например, в работе [6] доказано, что  $L(l_n) = 4n - 4$  и  $4n - 4 \leq L(\bar{l}_n) \leq 4n - 3$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$ , а в работе [7] доказано, что  $L(l_n) = 4n - 4$  и  $4n - 4 \leq L(\bar{l}_n) \leq 4n - 3$  в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$ . Для некоторых базисов есть описание устройства минимальных схем. Например, в работе [5] показано, что все минимальные схемы, реализующие линейные функции в базисе  $\{x \rightarrow y, \bar{x} \wedge y\}$  имеют определенную блочную структуру, а в работе [8] аналогичный результат доказан для минимальных схем, реализующих линейные функции в базисе  $\{x \wedge y, x \vee y, \bar{x}\}$ .

В настоящей работе устанавливается точное значение сложности функции  $\bar{l}_n$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$ , состоящем из единственного функционального элемента — штриха Шеффера, а также описывается структура всех минимальных схем, реализующих функцию  $l_n$  в том же базисе.

Основным приемом доказательства в данной работе является метод забивающих констант, предложенный в работе [4] и использованный также в статьях [6, 7, 8, 9]. Впрочем, для доказательства утверждений из данной работы одного только метода забивающих констант оказалось недостаточно, поэтому в ней использован ряд соображений, связанных с глобальной структурой схемы.

Для схемы  $S$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$  через  $L(S)$  обозначается сумма весов функциональных элементов в  $S$ ; число  $L(S)$  называется сложностью схемы  $S$ . Сложностью реализации произвольной булевой функции  $f$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$  называется число  $\min L(S)$ , где минимум берется по всем схемам  $S$ , реализующим функцию  $f$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$ . Сложность реализации функции  $f$  в базисе  $\{\bar{x} \wedge y\}$  будем обозначать через  $L(f)$ .

Схему, изображенную на рис. 1, будем называть стандартным блоком. Все элементы, входящие в стандартный блок — двухвходовые. Знаком „□“ на рисунке отмечен элемент блока, который мы будем называть выходным. Стандартный блок входит в

некоторую схему  $S$  правильно, если выходы всех элементов этого блока, кроме выходного, не подаются на входы элементов, не принадлежащих блоку.

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.**

Всякая минимальная схема в базисе  $\{\overline{x \wedge y}\}$ , реализующая линейную функцию  $l_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ , состоит из  $n - 1$  стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно.

В следующей теореме устанавливается точное значение сложности функции  $\overline{l_n}$  в базисе  $\{\overline{x \wedge y}\}$ .

**Теорема 2.**

При любом натуральном  $n$  сложность реализации линейной функции  $\overline{l_n} = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$ ,  $n \geq 2$  в базисе  $\{\overline{x \wedge y}\}$  составляет  $4n - 3$ .

### Литература

1. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
2. Cardot C., Quelques rezultats sur l'application de l'algebre de Boole a la syntheses des circuits a relais. Ann. Telecomm. 1952. 7, 2. 75–84.
3. Лупанов О.Б., Асимптотические оценки сложности управляемых систем. — М.: МГУ, 1984.
4. Редькин Н.П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов. Проблемы кибернетики. 1970. 23, 83–101.
5. Комбаров Ю.А., О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе  $x \rightarrow y, \overline{xy}$ . Труды VIII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 6–9 апреля 2009 г.) М.: МАКС Пресс, 2009, 145–149.
6. Редькин Н.П., О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов. Кибернетика. 1971. 6, 31–38.
7. Шкробела И.С., О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе  $x \rightarrow y, \overline{xy}$ . Дискретная математика. 2003. 15, 4, 100–112.
8. Комбаров Ю.А., О минимальных схемах для линейных булевых функций. Вестник Московского университета, серия 1, Математика. Механика. 2011. 6, 41–44.
9. Редькин Н.П., О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций. Материалы IX Международного семинара „Дискретная математика и ее приложения“, посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. 11–19.

### Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя проф. Н.П. Редькина за помощь в работе и постановку задачи.

Иллюстрации

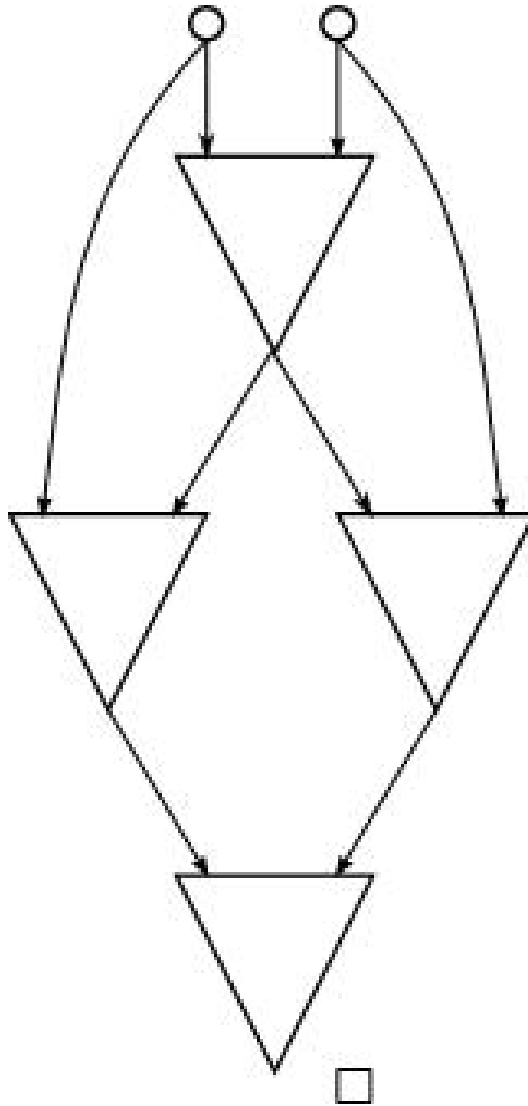


Рис. 1: Рис. 1