

Секция «Математика и механика»

О сложности укладки деревьев на плоскость

Ли Валентина Александровна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет  
вычислительной математики и кибернетики, Алмалык, Узбекистан  
E-mail: valentinalee@mail.ru

Множество  $\mathcal{N}^2$  – пары  $(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbf{N}$ , назовем координатной сеткой. Рассмотрим граф  $G = \{V, W\}$ , где  $V$  – множество вершин графа, а  $W$  – множество ребер.

Укладкой графа  $G = \{V, W\}$  на координатную сетку будем называть отображение  $\varphi : V \rightarrow \mathcal{N}^2$ , сопоставляющее вершинам данного графа некоторые координаты  $(x, y) \in \mathcal{N}^2$ , причем разным вершинам соответствуют разные координаты.

Длиной ребра  $w$  графа  $G$ , при укладке  $\varphi$  будем называть величину  $L(\varphi(w)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ , где  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  координаты вершин  $v_1$  и  $v_2$ , ребра  $w$ , соответственно.

Длина укладки  $\varphi$  графа  $G$ , при данной укладке  $\varphi$  есть  $L(\varphi(G)) = \sum_{w \in W} L(\varphi(w))$ .

Площадь укладки  $\varphi$  графа  $G$  есть площадь минимального прямоугольника, содержащего все вершины уложенного графа, при чем стороны прямоугольника параллельны осям координат сетки. Обозн.  $S(\varphi(G))$ .

Пусть  $\mathcal{G}$  – класс всевозможных графов.

Алгоритмом укладки графа  $G \in \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  на координатную сетку будем называть отображение  $\mathcal{A}$ , задаваемое для всего подкласса  $\mathcal{G}'$ , которое каждому графу  $G \in \mathcal{G}'$  сопоставляет определенную его укладку  $\varphi_{\mathcal{A}}(G)$ .

Длиной укладки  $L_{\mathcal{A}}(G)$  графа  $G \in \mathcal{G}'$  при заданном алгоритме  $\mathcal{A}$  называется величина  $L_{\mathcal{A}}(G) = L(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$  и площадь укладки  $S_{\mathcal{A}}(G)$  графа  $G \in \mathcal{G}'$  при заданном алгоритме  $\mathcal{A}$  есть  $S_{\mathcal{A}}(G) = S(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$  площадь минимального прямоугольника, в который укладывается граф  $G$  при заданной алгоритмом укладке  $(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$ .

Рассмотрим подкласс графов – деревья. Введем обозначения:

- $D_n^c$  – класс полных  $n$ -ичных деревьев.
- $D_{n,r}^c$  – полное  $n$ -ичное дерево радиуса  $r$  из класса  $D_n^c$ .

**Теорема 1.** Для класса полных бинарных деревьев произвольного радиуса  $r = 1, 2, \dots$  существует укладка  $\mathcal{A}$ , для которой справедливы оценки:  $N \leq L_{\mathcal{A}}(D_{2,r}^c) < \frac{41}{32} \cdot N$ ;  $N \leq S_{\mathcal{A}}(D_{2,r}^c) < \frac{5}{4} \cdot N$ , где  $N$  – количество ребер в дереве.

**Теорема 2.** Для класса полных  $n$ -ичных деревьев произвольного радиуса  $r = 1, 2, \dots$  существует укладка  $\mathcal{A}$ , для которой справедливы оценки:

если  $n$  – квадрат какого-то числа  $m$ ,  $n = m^2$ :  $N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} - 2) - \frac{\sqrt{1+2n}}{3} < L_{\mathcal{A}}(D_{n,r}^c) < N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} + \frac{5}{4}) + 3$ ;  $N \leq S_{\mathcal{A}}(D_{n,r}^c) \leq 2N$

если  $n$  – любое:  $N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} - 2) - \frac{\sqrt{1+2n}}{3}$ .

Литература

1. Ли В. А. Порядок сложности укладки деревьев на плоскость. // Интеллектуальные системы, Т. 14, вып. 1-4, сс. 393-417, 2010.