Секция «Математика и механика»

Об алгоритмической сложности взаимной перестройки пороговых функций

Соколов Андрей Павлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Химический факультет, Москва, Россия
E-mail: sokolov@intsys.msu.ru

Пороговые функции алгебры логики являются математической моделью нейронов. В качестве средства задания пороговых функций в работе рассматриваются линейные формы вида $x_1w_1 + ... + x_nw_n - \sigma$ с целочисленными коэффициентами и свободным членом.

В работе [4] исследовалась сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем пошагового изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности данного процесса рассматривалась операция изменения коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Данный процесс может интерпретироваться как процесс пошагового обучения нейрона с пороговой функцией активации.

Для всякой пороговой функции существует бесконечное множество задающих ее линейных форм с целыми коэффициентами. В связи с этим, для всякой пары пороговых функций, можно построить задающие их линейные формы с целыми коэффициентами такие, что для перестройки одной в другую потребуется сколь угодно большое количество элементарных шагов. Однако, если оценивать близость между пороговыми функциями как минимально возможное количество элементарных шагов, достаточное для перестройки одной линейной формы в другую, то данная величина становится ограниченной. Известно [2], что всякая пороговая функция от n переменных может быть задана линейной формой с целочисленными коэффициентами и свободным членом, по модулю не превосходящими величины $L\left(n\right) = 2^{-n}\left(n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}$. Таким образом, введенная функция близости пороговых функций от n переменных не превосходит величины $2\left(n+1\right)L\left(n\right)$. В работе [4] рассмотрен более общий случай задачи перестройки. Рассмотрены классы пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок. Получено полное описание данных классов в терминах групп перестановок, сохраняющих разбиения. Получены верхняя и нижняя оценки на величину близости пороговых функций внутри данных классов.

Можно рассматривать более сложные функции близости, определяемые большим числом допустимых элементарных операций перестройки линейных форм. Так, в работе [5], были рассмотрены следующие модификации функции близости между пороговыми функциями: в первом случае к операции единичного изменения коэффициентов добавляется операция инвертирования (умножения на -1) коэффициента или порога, во втором случае также добавляется операция умножения и целочисленного деления коэффициента или порога на 2. Были получены верхние и нижние оценки на возникающие в данных случаях функции близости. В частности, было показано, что добавление операции инвертирования не дает существенного сокращения сложности перестройки, в то время как операции удвоения и деления позволяют сократить взаимную близость пороговых функций от n переменных с экспоненциальной до полиномиальной величины.

Результаты работ [4] и [5] дают нижние и верхние оценки на количество элементарных операций перестройки линейных форм для перехода от одной пороговой функции к другой. Однако они не дают описания алгоритмов для осуществления подобного перехода. Эти вопросы рассматриваются в данной работе.

В общем случае задача поиска ближайшей линейной формы, по всей видимости, является сложной. Можно показать, что данная задача является частным случаем задачи целочисленного линейного программирования, которая, как известно [1], [3], является сложной.

Если ослабить требование нахождения ближайшей линейной формы, то задача перестройки может быть решена эффективным образом. В данной работе вводится понятие множества допустимых линейных форм, весовые коэффициенты которых при стремлении числа переменных n к бесконечности по модулю ограничены величиной $O(n)\, L(n)$. Получены оценки сложности нахождения допустимой линейной формы для пороговой функции заданной виде пары дизъюнктивных нормальных форм специального вида. Показано, что в этом случае задача нахождения допустимой линейной формы имеет полиномиальную сложность от длины дизъюнктивных нормальных форм. Получены оценки сложности взаимной перестройки допустимых линейных форм для различных функций близости в худшем случае.

Описан алгоритм перестройки пороговых функций, который имеет полиномиальную сложность как в терминах числа вспомогательных арифметических операций, так и в смысле числа элементарных шагов перестройки.

Литература

1. Garey M.R., Johnson D.S., Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman and Co., San Francisco, 1979.
2. Muroga S., Toda I., Takasu S., Theory of majority decision elements, J. Franklin Institute, Vol. 271/5, 376-418, 1961.
3. Von zur Gathen J., Sieveking M., A Bound on Solutions of Linear Integer Equalities and Inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 72, 155-158, 1978.
4. Соколов А.П., О конструктивной характеризации пороговых функций, инвариантных относительно групп перестановок, Москва, Интеллектуальные системы, т.14, МГУ, 2010.
5. Соколов А.П., Сложность обучения нейросетей для различных функций близости, Москва, Ломоносовские чтения, МГУ, 2011.
6. Хачиян Л.Г., Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании, Вычисл. матем. и матем. физ., 20:1, 51-68, 1980.

Слова благодарности

Автор благодарит профессора Валерия Борисовича Кудрявцева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.