

Секция «Математика и механика»

О частичном порядке, задаваемом связанными идемпотентами в гильбертовом пространстве

Ефимов Михаил Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: efitov.mikhail@gmail.com

Пусть  $H$  — гильбертово пространство над полем комплексных чисел,  $B(H)$  — совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве  $H$ .

**Определение 1** Будем говорить, что оператор  $A \in B(H)$  обладает связанным идемпотентом, если существует такой оператор  $P \in B(H)$ , что  $P^2 = P$ ,  $\overline{\text{Im}A} = \text{Im}P$ ,  $\text{Ker}A = \text{Ker}P$ . Множество операторов, обладающих связанными идемпотентами, будем обозначать через  $I_s(H)$ , а указанный идемпотент  $P$  для оператора  $A \in I_s(H)$  через  $\pi(A)$ .

**Определение 2** Пусть  $A, B \in B(H)$ . Положим  $A \overset{\#}{\leq} B$ , если и только если  $A = B$ , или  $A \in I_s(H)$  и  $\pi(A)A = \pi(A)B$ ,  $A\pi(A) = B\pi(A)$ .

Отметим, что если  $H$  — конечномерно, то введенное отношение совпадает с  $\overset{\#}{\leq}$ -порядком на матрицах (см. [1]). Утверждение следующей теоремы аналогично результату для минус-порядка из работы [2]:

**Теорема 3** Отношение  $\overset{\#}{\leq}$  является частичным порядком и для любых  $A, B \in B(H)$  следующие условия эквивалентны:

1)  $A \overset{\#}{\leq} B$ ;

2) существует прямое разложение пространства  $H$  в сумму замкнутых подпространств  $H = H_1 \oplus H_2$ , что операторы  $A, B: H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2$  имеют следующие матричные представления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где  $A_1: H_1 \rightarrow H_1$  и  $B_1: H_2 \rightarrow H_2$  — ограниченные линейные операторы,  $A_1$  инъективен,  $\overline{\text{Im}A} = H_1$ ;

3)  $A = B$  или  $A \in I_s(H)$ ,  $A(B - A) = (B - A)A = 0$ .

Литература

1. S. K. Mitra. On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. 1987. No 92. P 17–37.
2. P. Semrl. Automorphisms of  $B(H)$  with respect to minus partial order // J. Math. Anal. Appl. 2010. No. 369. P. 205–213.

**Слова благодарности**

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1.