

Секция «Математика и механика»

Быстрое распознавание тропических матриц факторизационного ранга 3

Шитов Ярослав Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: rmar@yandex.ru

Тропическое полукольцо — это множество \mathbb{R} вещественных чисел, на котором заданы тропические арифметические операции: сложение $\oplus : (a, b) \rightarrow \min\{a, b\}$ и умножение $\otimes : (a, b) \rightarrow a + b$. Арифметические операции над тропическими векторами и матрицами определяются таким же образом, как и в классическом случае, только операции $+$ и \cdot заменяются на \oplus и \otimes , соответственно. В отличие от классической линейной алгебры, существует несколько важных ранговых функций тропических матриц, см. [1,3]. Доклад посвящен функции факторизационного ранга, значение которой на матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ равно наименьшему целому k , для которого $A = B \otimes C$ при некоторых $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Изучение факторизационного ранга оказывается важным для приложений в комбинаторной оптимизации (см. [2]) и некоторых других (см. также [3]).

Тропические матрицы, факторизационный ранг которых не превосходит 2, достаточно хорошо изучены. В частности, в [3] показана возможность распознавания таких матриц за полиномиальное время. Там же было показано, что факторизационный ранг матрицы не превосходит 2 в том и только том случае, если все ее миноры порядка 3 имеют неполный ранг; вопрос о том, верен ли аналогичный результат для матриц ранга, не превосходящего 3, оставался открытым. В докладе будет дан отрицательный ответ на этот вопрос; а именно, будет приведен пример матрицы размера 5×4 факторизационного ранга 4, ранг любого максимального минора которой не превосходит 3.

Другой интересный вопрос был сформулирован Девелином, Сантосом и Штурмфельсом (вопрос 2 раздела 8 в [3]): возможно ли распознавание тропических матриц факторизационного ранга 3 за полиномиальное время? Будет дан положительный ответ на этот вопрос; будет, более того, показано, что существует линейный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга 3.

Литература

1. M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman. Linear independence over tropical semirings and beyond // Contemp. Math. 2009. No. 495. P. 1–38.
2. A. Barvinok, D. S. Johnson, G. J. Woeginger. The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms // Lect. Not. in Comp. Sc. 1998. No. 1412. P. 195–201.
3. M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels. On the rank of a tropical matrix // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 2005. No. 52. P. 213–242.

Слова благодарности

Я благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постоянное внимание к моей работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1.