Секция «Математика и механика»

Задача размена и k-представимые числа

Токмакова Алина Юрьевна
Школьник
ГБОУ лицей 1303, , Москва, Россия
E-mail: suppper@inbox.ru

Введение и постановка задачи.

Задача «о размене монет», также известная как проблема Фробениуса (немецкого математика Фердинанда Фробениуса (1849 - 1917)), в которой требуется найти число, являющейся крупнейшей денежной суммой, не набираемой монетами указанных номиналов. Например, крупнейшая сумма, которая не может быть получена, используя только монеты в 3 и 5 единиц, составляет 7 единиц, эту сумма известна, как число Фробениуса [1], будем обозначать его F. В данном случае, число 7 мы не сможем набрать, а любое большее 7 сможем, то есть F(3,5)=7.

Теорема (Фробениус[1]). Пусть даны 2 взаимно простых числа p_1 и p_2. Тогда $F_2(p_1, p_2){=}p_1\ p_2 - p_1 - p_2$.

Заметим, что, действительно, $F(3{,}5){=}3{\cdot}5 - 3 - 5 = 7$. Задача имеет смысл, если наибольший общий делитель $(p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots,\ p_k) = 1$. Данная задача решена для $k \leq 3$, для k =3 найдена формула для частного случая числа Фробениуса, которое мы можем отыскать по такой формуле: $F(p_1,\ p_2,\ p_3)\ {=}2\ p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3$ [2], где p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3 – номиналы монет.

Пусть дан набор взаимно простых чисел $(p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots,\ p_k)$. Положим(1) P_1-произведение k-1 p_i-ых. Заметим, что числа $(P_1,\ P_2,\ldots,\ P_k)$ взаимно просты, а любые (k-1) не взаимно просты. Будем называть число x k – набираемым, если его можно представить (т.к. x – это сумма, то набрать) в таком виде $x = \sum a_i P_i$, где a_i - коэффициенты при P_iи $a_i > 0$. Обозначим A_k – множество чисел, не набираемых в виде линейной комбинации чисел P_i с целыми неотрицательными коэффициентами. Есть гипотеза, что множество A_k ограничено. Тогда у него существует максимальный элемент ($\mathrm{G}_k = \max \mathrm{A}_k$ – оно же последнее, не являющиеся k - набираемым).

Постановка задачи сводится к отысканию этого G_k.

Теорема 1. Пусть дан набор попарно взаимно простых чисел $(p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots,\ p_k)$. Тогда множество A_k - ограничено.

G_k = (2)

***k* – представимые числа**

k – представимые числа – числа, которые можно представить в виде в виде k взаимно простых натуральных слагаемых, любые k–1 из которых не взаимно просты. S – k–представимое число, тогда $S = R_1{+}R_2 + \ldots + R_k$, где $R_k = a_kP_k$ и P_k= произведение *k-1* p_k-ых, где p_i – простые числа, для i из 1, 2,..., k. f – будем называть последнее число, не являющиеся k – представимым, так как f единственно для фиксированного k, следовательно обозначим его f (k).

Теорема 2. Если p_1= *2*, то число G_k можно будет найти (3)

Теорема 3. Если p_k не больше произведения (отличных от p_k*)* *k-1* простых чисел (4)

Нами были найдены:

· 156 чисел, не являющихся k – представимыми , $k = 3$
· Последнее, не являющиеся k – представимыми, $k = 3$ (2730);
· последнее, не являющееся k – представимым, $k = 4$ (570570);
· количества натуральных чисел, не являющихся k – представимыми, $k = 4$ (3484).

Литература

1. В.И.Арнольд «Экспериментальное наблюдение математических фактов» (Москва, издательство МЦНМО 2006г.) [1]

2. А. В. Устинов «Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами» (23 января 2010 г.). [2]

3. С. Б. Гашков «Системы счисления и их применения» (Библиотека «Математическое просвещение» (Выпуск 29)). [3]

4. Сизый С. В. «Лекции по теории чисел. Учебное пособие для математических специальностей» (Екатеринбург. Уральский государственный университет им. А. М. Горького, 1999г.). [4]

5. К. Айрлэнд, М. Роузен «Классическое введение в современную теорию чисел». [5]

6. И.Л. Акулич «Математическое программирование в примерах и задачах» (издательство «высшая школа», 1986г). [6]

7. "Задачник Кванта"задача М2122 авторов В. Лецко и В. Сендеров опубликована в журнале"Квант"1 (2009г.). Разбор задачи опубликован в журнале "Квант"4 (2009г.). [7]

8. В. Н. Серпинский О решении уравнений в целых числах — М.: Физматлит, 1961. — 88 с. [8]

Слова благодарности

Научным руководителям Лецко В.А. и Привалову А.А.

Иллюстрации

Результат

Теорема 1. Пусть дан набор попарно взаимно простых чисел $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k)$.

Положим $P_i = \frac{1}{p_i}\prod_{j=1}^{k} p_j$ (1). Тогда множество A_k - ограничено и

$$G_k = (k-1)\prod_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} P_i \quad (2)$$

k – представимые числа

k – представимые числа – числа, которые можно представить в виде в виде *k* взаимно простых натуральных слагаемых, любые *k*–1 из которых не взаимно просты.

S – *k*–представимое число, тогда

$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_k$, где $R_i = \frac{a_i}{p_i}\prod_{j=1}^{k} p_j$ и $P_i = \frac{1}{p_i}\prod_{j=1}^{k} p_j$,

где p_i – простые числа, для i из $\{1, 2, \ldots, k\}$.

f – будем называть последнее число, не являющиеся *k* – представимым, так как *f* единственно для фиксированного *k*, следовательно обозначим его *f*(*k*).

Теорема 2. Если $p_1 = 2$, то число G_k можно будет найти

$$G_k = f(k) = (k-1)\prod_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} R_i \quad (3)$$

Теорема 3. Если p_k не больше произведения (отличных от p_k) *k-1* простых чисел $p_k \le \prod_{j=1}^{k-1} p_j$, то $f(p_1, p_2, \ldots, p_k) = k\prod_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} R_i$ (4)

В общем случае $f = \sum_{i=1}^{k} a_i P_i + s\prod_{i=1}^{k} p_i$

Тогда общее число представлений равно (т.к. сочетания с повторениями)

$$n = \frac{(s+k-1)!}{s!(k-1)!}$$

Рис. 1: так как формулы не вставлялись, они есть на фото вместе с описаниями