## Секция «Математика и механика»

**Эффективная хаусдорфова размерность и случайность по классам мер**

***Андреев Михаил Александрович***

*Студент*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: amishaa@mail.ru*

Эффективная хаусдорфова размерность точки в канторовском пространстве $\Omega$ (=бесконечной последовательности нулей и единиц) определяется следующим образом [2]. Для данного $\alpha \in (0,1)$ будем называть точку $\alpha$-нулевой, если существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, у которых сумма длин, возведённых в степень $\alpha$, не превосходит $\varepsilon$. (Интервалами в канторовском пространстве называются множества вида $x\Omega$, то есть множества последовательностей, имеющих данное начало $x$. Длина такого интервала определяется как $2^{-|x|}$, где $|x|$ — длина двоичного слова $x$.) Эффективной размерностью точки $x$ называется точная нижняя грань тех $\alpha$, при которых $x$ является $\alpha$-нулевой.

В работе Раймана (Jan Reimann) [3] предложено эквивалентное определение эффективной хаусдорфовой размерности в терминах случайности относительно класса $\alpha$-ёмких мер. Мера $\mu$ на $\Omega$ называется $\alpha$-ёмкой, если $\mu(x\Omega) \leq 2^{-}\alpha|x|$ для всех слов $x$. Последовательность называется неслучайной относительно класса мер $\mathcal{M}$ (см. [1]), если существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, у которых по любой мере из класса $\mathcal{M}$ суммарная мера не превосходит $\varepsilon$.

Теорема (Jan Reimann, [3])

Эффективная размерность любой точки $\omega \in \Omega$ равна точной нижней грани тех $\alpha$, при которых $\omega$ случайна относительно класса всех $\alpha$-ёмких мер.

Доказательство Раймана не прямое и довольно сложное. Мы приводим прямое доказательство с использованием простых комбинаторных соображений о потоках и разрезах.

### Литература

1. Биенвеню Л. Алгоритмические тесты и случайность относительно классов мер / Л. Биенвеню, П. Гач, М. Хойруп, К. Рохас , А. Шень // Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2011, т. 274. с. 1 – 62.

2. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Шень А. Колмогороская сложность и алгоритмическая случайность. - М.:МЦНМО, 2010.

3. Reimann J. Effectively closed set of measures and randomness. [preprint электронная версия] - http://www.math.psu.edu/reimann/Publications/closed_sets_measures_preprint.pdf