

Секция «Математика и механика»

Использование функции напряжений в решении задач прочности слоистых пластин

Брезовский Павел Валентинович

Студент

Казанский национальный исследовательский технический университет им.
А.Н.Туполева, Институт авиации, наземного транспорта и энергетики, Казань,
Россия

E-mail: pav-89@mail.ru

Пластины из слоистых композиционных материалов достаточно широко применяются в конструкциях летательных аппаратов, в связи с этим появляются все новые формы расчетных моделей для определения напряженно-деформированного состояния. Приведем решение данной задачи с использованием базисных функций.

Рассмотрим анизотропную пластину постоянной толщины h , с внешней границей L_0 , находящуюся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

От исходных уравнений теории упругости перейдем к одному относительно функции напряжений $F(x, y)$, связанной с компонентами напряжений равенствами:

$$\sigma_x = \frac{d^2 F}{dy^2}, \quad \sigma_y = \frac{d^2 F}{dx^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{d^2 F}{dxdy}. \quad (1)$$

Путем преобразований, получим уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений:

$$\gamma_0 \frac{d^4 F}{dx^4} + \gamma_1 \frac{d^4 F}{dx^3 dy} + \gamma_2 \frac{d^4 F}{dx^2 dy^2} + \gamma_3 \frac{d^4 F}{dxdy^3} + \gamma_4 \frac{d^4 F}{dy^4} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\gamma_0 = \mu_{22}$, $\gamma_1 = -2\mu_{26}$, $\gamma_2 = 2\mu_{22} + \mu_{66}$, $\gamma_3 = -2\mu_{66}$, $\gamma_4 = \mu_{11}$; μ_{ij} — упругие постоянные, характеризующие свойства материала.

Определив функцию F из уравнения (2), удовлетворяющую заданным на границе пластины условиям, можно найти напряжения, деформации и перемещения в любой точке пластины. Если на границе пластины заданы усилия X_n и Y_n , то граничные условия удобнее записать в интегральной форме:

$$-\int_0^s Y_n + C_1 = \frac{dF}{dx}, \quad \int_0^s X_n + C_2 = \frac{dF}{dy}, \quad (3)$$

где S — текущая точка любого контура; C_1 и C_2 — произвольные постоянные, не влияющие на напряженное состояние.

Полученное решение уравнения (2) имеет вид:

$$F(x, y) = A_0 + A_1(x + y) + A_2(x^2 - 2(y^2) + xy) + A_3(x^3 + (x^2)y + x(y^2) + y^3) + \dots + A_N x^N y^N,$$

где A_i — подлежащие определению произвольные коэффициенты, количество которых зависит от метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения (определяются из граничных условий с помощью метода взвешенных невязок).

Изложенный алгоритм решения задачи деформирования анизотропного тела удобен для реализации в системах автоматизированного проектирования процессов изготовления деталей различного назначения, входящих в конструкцию авиационной и ракетной техники. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач параметрической идентификации и обратных задач, например, уточнения физико-механических параметров, определяющих коэффициенты математических моделей на основе прочностного эксперимента.

Литература

1. Дружинин Г.В., Закиров И.М., Бодунов Н.М. Базисные функции в приближенных решениях краевых задач. Казань: Изд-во «Фен», 2000. 376 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Мэттьюз Р., Ролингс Р. Композиционные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с.