Секция «Математика и механика»

Аналитическое решение задачи о растяжении естественно закрученного стержня в рамках моментной теории упругости

Попов Алексей Константинович

Аспирант

Таганрогский государственный педагогический институт, Физико-математический факультет, Таганрог, Россия

E-mail: ASDAlexey@yandex.ru

Рассмотрена задача об упругом равновесии естественно закрученного стержня под действием растягивающих концевых усилий в рамках моментной теории упругости. Стержень подвержен осевому растяжению. Решение в перемещениях поставленной задачи найдено в виде:

$$\begin{gathered}
u_1=A_{11}x^1+A_{12}x^2+A_{13}x^3+\\
+\tau_0\left(D_{11}x^1+D_{12}x^2+D_{13}x^3+B_{11}\left(x^1\right)^2+B_{12}x^1x^2++B_{13}x^1x^3+B_{22}\left(x^2\right)^2+B_{23}x^2x^3+B_{33}\left(x^3\right)^2\right) \quad (1)\\
u_2=A_{21}\cdot x^1+A_{22}x^2+A_{23}x^3+\tau_0(C_{11}\left(x^1\right)^2+C_{12}x^1\cdot x^2+D_{21}\cdot x^1+D_{22}x^2+D_{23}x^3+\\
+C_{13}x^1x^3+C_{22}\left(x^2\right)^2+C_{23}x^2x^3+C_{33}\left(x^3\right)^2)\\
u_3=A_{31}x^1+A_{32}x^2+A_{33}x^3+\tau_0\left(p\varphi\left(x^1,x^2\right)+E_{13}x^1x^3+E_{23}x^2x^3+E_{33}\left(x^3\right)^2\right)
\end{gathered}$$

Задача об упругом равновесии стержня при указанных условиях сводится к определению постоянных и функций, входящих в вектор перемещений, нахождению компонент вектора перемещений (1), тензора силовых и моментных напряжений, удовлетворяющих в области, занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия, граничным условиям на основаниях и боковой поверхности стержня. В рамках работы независимые постоянные определены из дифференциальных уравнений равновесия моментной теории упругости в результате их разложения в ряд по степеням параметра τ_0(степень крутки), граничных условий на основаниях стержня, представимых в виде интегральных соотношений и граничных условий боковой поверхности стержня, представимых в виде дифференциальных соотношений. В результате получены формулы компонент тензора напряжений:

$$\begin{gathered}
\sigma_{33}=p \qquad \sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{12}=\sigma_{21}=0\\
\sigma_{13}=\sigma_{31}=\left(\tau_0p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}+\left(\frac{p((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}+\frac{\lambda p}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right)x^2\tau_0\right)\mu \quad (2)\\
\sigma_{23}=\sigma_{32}=\left(\tau_0p\frac{\partial\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}-\left(\frac{p((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}+\frac{\lambda p_1}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right)x^1\tau_0\right)\mu
\end{gathered}$$

Указаны выражения для компонент тензора моментных напряжений и среднее значение кручения τ для всего поперечного сечения:

$$\begin{gathered}
\mu_{11}=p\nu\tau_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^1}+\frac{((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}\right)\\
\mu_{22}=p\nu\tau_0\left(\frac{((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^1}\right)\ \mu_{12}=\mu_{21}=-\frac{\tau_0p}{2}\left((\nu+\beta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^1)^2}-(\nu-\beta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^2)^2}\right) \quad (3)\\
\mu_{13}=\mu_{31}=\nu p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}-\frac{((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}x^2\right)\tau_0^2 \qquad \mu_{33}=\frac{2p(\lambda I_p-(3\ \lambda+2\ \mu)T)\nu\tau_0}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}\\
\mu_{23}=\mu_{32}=\nu p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+\frac{((3\ \lambda+2\ \mu)T-I_p\lambda)}{(3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S}x^1\right)\tau_0^2\\
\tau=\frac{1}{S}\int_S\kappa_{x_3x_3}dS=\frac{p(\lambda I_p-(3\ \lambda+2\ \mu)T)\tau_0}{S((3\ \lambda+2\ \mu)\mu\ I_p+2(3\ \lambda+2\ \mu)\nu S)}
\end{gathered}$$

Полученные формулы (2), (3) отличаются от результатов статьи Риза П.М. [1] тем, что:

1. Депланация поперечного сечения стержня определяется не только компонентами силовых напряжений σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32}, но и компонентами моментныхнапряжений.
2. Компоненты u_1 и u_2 вектора перемещений зависят не только от величины растягивающих усилий p, но и от геометрии стержня.
3. Среднее значение кручения τ для всего поперечного сечения зависит не только от полярного момента и величины T, но и от площади поперечного сечения S.

Литература

1. Риз П.М. Деформация естественно закрученных стержней. — Доклады АН СССР, 1939, т.3, 4, с.451.