Секция «Математика и механика»

Линейные коциклы над эргодическими автоморфизмами и барицентры мер на границе симметрических пространств

Липатов Максим Евгеньевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: maxim.lipatov@gmail.com

Пусть T – эргодический, сохраняющий меру автоморфизм стандартного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Всякая случайная матрица $A\colon \Omega \to GL(d, K)$, где K – поле, порождает случайную последовательность $A_n(\omega)$, заданную формулами $A_0(\omega) = \mathrm{Id}$, $A_n(\omega) = A(T^{n-1}\omega)\dots A(T\omega)A(\omega)$, $n > 0$, $A_n(\omega) = (A_{|n|}(T^n(\omega)))^{-1}$, $n < 0$, которая называется *линейным коциклом.* $GL(d, K)$-значные коциклы $A_n(\omega)$ и $B_n(\omega)$ (и соответствующие случайные матрицы $A(\omega)$ и $B(\omega)$) называются *когомологичными,* если существует случайная матрица $C\colon \Omega \to GL(d, K)$, такая, что $B(\omega) = C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega)$ п.н. В статье [1] для $K = \mathbb{R}$ доказывается, что любой линейный коцикл когомологичен коциклу, имеющему канонический вид. В случае $K = \mathbb{R}$ и $d = 2$ данная классификация осуществлялась в работах [2, 3] с помощью метода барицентра. В докладе будет показано, как можно обобщить этот метод для получения аналогичной классификации коциклов в случае $K = \mathbb{C}$ и произвольного d, используя свойства барицентров мер на границе Фюрстенберга симметрических пространств $SL(k, \mathbb{C})/SU(k)$. Будет доказана

Теорема. *Любая $GL(d, \mathbb{C})$-значная случайная матрица когомологична блочно-треугольной случайной матрице с неприводимыми случайными матрицами на диагонали, имеющими блочно-конформный вид:*

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}(\omega) & * & * & * \\ 0 & A^{(2)}(\omega) & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A^{(l)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad A^{(i)}(\omega) = \begin{pmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots \\ A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)1,1}(\omega) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)m_i,m_i}(\omega) \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i\colon \Omega \to S_{m_i}$ – некоторые случайные перестановки и $A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)j,j}(\omega)$ – некоторые конформные случайные матрицы, т.е. $A^{(i)}_{\sigma_i(\omega)j,j}(\omega) \in \{M \in GL(\mathbb{C}, d_i) : M\overline{M}^T = a\mathrm{Id}, a > 0\}$.

При этом в явном виде будет построена сопрягающая случайная матрица.

Литература

1. Arnold L., Cong N. D., Oseledets V. I. Jordan normal form for linear cocycles // Random Op. Stoch. Eq. 1999. V. 7. P. 303–358.
2. Oseledets V. I. Classification of GL(2,R)-valued cocycles of dynamical systems. Report Nr. 360. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.
3. Thieullen Ph. Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices // J. Anal. Math. 1997. V. 73. P. 19–64.