Секция «Математика и механика»

Функциональная центральная предельная теорема для интегралов по случайным мерам

Демичев Вадим Петрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: vadim.demichev@gmail.com

Пусть $M = M(\omega, B)$ – ассоциированная квадратично интегрируемая стационарная случайная мера на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, см., напр., [1], гл. 1, §3. Будем предполагать, что M удовлетворяет условию конечной восприимчивости:

$$\sigma^2 := \sup_{t>0} \mathsf{cov}(M((-1/2, 1/2]^m), M((-t, t]^m)) < \infty.$$

Рассмотрим $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ – некоторую борелевскую функцию на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Для каждого $T > 0$ обозначим

$$M_T[f](x) = T^{-m/2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y/T) M(dy) - \mathsf{E} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y/T) M(dy) \right).$$

В [2] показано, что если при некотором $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x, \cdot)$ п.в. ограничена и интегрируема, то $M_T[f](x)$ является случайной величиной и сходится по распределению к гауссовскому закону с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \|f(x, \cdot)\|_2^2$, когда $T \to \infty$. Мы докажем функциональный вариант этой предельной теоремы, наложив дополнительные ограничения на гладкость функции f.

Теорема 1 *Пусть $f(\cdot, y) \in C^n(\mathbb{R}^n)$ при каждом $y \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такая ограниченная интегрируемая действительная функция ϕ_K на $\mathbb{R}^m$, что $|f(x, y)| \leqslant \phi_K(y)$, $x \in K$, и все частные производные $f(x, y)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ вплоть до порядка n включительно также не превосходят по модулю $\phi_K(y)$, когда $x \in K$. Тогда случайные поля $M_T[f](x)$ сходятся по распределению в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ при $T \to \infty$ к центрированному гауссовскому полю с ковариационной функцией*

$$r(s, t) = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^m} f(s, y) f(t, y) dy, \quad s, t \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $C(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}^n$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах.

Этот результат мы применяем к доказательству функциональной центральной предельной теоремы для параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 10-01-00397-а.

Литература

1. Булинский А.В., Шашкин А.П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М., 2008.

2. Evans S.N. Association and random measures // Probab. Theory Rel. Fields. 1990. 86, 1, 1-19.